

**Fakultät für Physik und Astronomie**  
**Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg**

Diplomarbeit  
im Studiengang Physik

vorgelegt von  
**Stefan Hunsmann**

aus Köln

2004



# Josephson-Effekte in Bose-Einstein Kondensaten

Die Diplomarbeit wurde von Stefan Hunsmann ausgeführt am  
Kirchhoff-Institut für Physik  
unter der Betreuung von  
Herrn Prof. Dr. M. K. Oberthaler



## **Josephson-Effekte in Bose-Einstein Kondensaten**

Im Rahmen der vorliegenden Diplomarbeit ist der Aufbau eines Experiments zur Beobachtung von Josephson-Effekten in Bose-Einstein Kondensaten (BEC) beschrieben. Die schwache Kopplung von BECs stellt das atomphysikalische Analogon zum supraleitenden Josephson-Effekt dar. In unserem Experiment wird die schwache Kopplung durch ein rein optisches Doppeltopfpotential hergestellt. Dieses wird mit Hilfe einer Stehwelle und einer optischen Dipolfalle realisiert. Wir sind in der Lage jede beliebige Anfangsverteilung der Atome des BECs auf die beiden Potentialtöpfe herzustellen und ihre zeitliche Evolution zu beobachten. Erste Messungen haben allerdings gezeigt, daß die mechanische Stabilität der relevanten optischen Komponenten zur Beobachtung der Josephson-Effekte unzureichend war. Daher beschäftigt sich diese Arbeit auch mit der Optimierung der Stabilität des Aufbaus. Damit sind ideale Voraussetzungen für den ersten Nachweis der Josephson-Effekte in BECs geschaffen worden.

## **Josephson-Effects in Bose-Einstein Condensates**

In this thesis the experimental setup for investigating Josephson-effects in Bose-Einstein condensates (BEC) is described. The weak coupling of BECs represents the atom physical analogue to the common superconducting Josephson-effect. In our experiment the weak link is provided by an optical double-well trap. This is realised by the combination of a standing lightwave and a single dipoletrap. We are able to generate any initial population imbalance between the two potential wells and to observe its evolution in time. First measurements have shown that the relevant optical parts were insufficiently stable, not allowing the observation of any Josephson-dynamics. Hence this thesis deals also with optimising the mechanical stability of the experimental assembly. Therewith ideal conditions for the first experimental evidence of Josephson-effects in BECs are provided.



Meinem Großvater Dr. Werner Hunsmann





# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>5</b>
2.1	Bose-Einstein Kondensation . . . . .	5
2.1.1	Grundlagen . . . . .	5
2.1.2	Grundzustand eines BECs . . . . .	7
2.1.3	Healing-Länge . . . . .	8
2.1.4	Kollektive Anregungen . . . . .	9
2.2	Josephson Gleichungen . . . . .	11
2.2.1	Gekoppelte makroskopische Quantensysteme . . . . .	11
2.2.2	Klassische Josephson-Effekte . . . . .	12
2.3	Josephson Effekt im Doppelmuldenpotential . . . . .	16
2.3.1	Die Boson-Josephson-Junction . . . . .	17
2.4	Numerik . . . . .	22
2.4.1	Einfluß der Fallenparameter . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Experimenteller Aufbau</b>	<b>27</b>
3.1	Erzeugung von BECs . . . . .	27
3.1.1	Aufbau . . . . .	27
3.1.2	Lasersystem . . . . .	29
3.1.3	Magnetfalle . . . . .	32
3.1.4	Aufbau um die Glaszelle . . . . .	32
3.1.5	Steuerung . . . . .	33
3.2	Optische Dipolfallen und optische Gitter . . . . .	34
3.2.1	Atom-Licht-Wechselwirkung . . . . .	34
3.2.2	Atomare Polarisierbarkeit . . . . .	35
3.2.3	Dipolpotential und Streurrate . . . . .	36
3.2.4	x-DT und y-DT . . . . .	37
3.2.5	Optisches Gitter und Doppelmuldenpotential . . . . .	39
3.2.6	Kontrolle von Intensität und Phase . . . . .	41
3.3	Abbildungssystem . . . . .	41

<b>4 Experimentelle Ergebnisse</b>	<b>43</b>
4.1 Charakterisierung des Systems . . . . .	43
4.1.1 Eichung der optischen Potentiale . . . . .	43
4.1.2 Güte der Abbildung . . . . .	51
4.2 Josephson Effekt in BECs . . . . .	54
4.2.1 Experimentelle Parameter . . . . .	54
4.2.2 Beobachtung erster Oszillationen . . . . .	56
4.2.3 Mechanische Stabilität des Systems . . . . .	58
<b>5 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>63</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>66</b>
<b>Danksagung</b>	<b>73</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Vor 42 Jahren hat Josephson einen später nach ihm benannten Effekt vorhergesagt. Der Josephson-Effekt beschreibt das Verhalten eines von Cooper-Paaren getragenen Tunnelstroms zwischen zwei durch eine dielektrische Barriere getrennte Supraleiter [1]. Ein Jahr später wurde der Josephson-Effekt experimentell von Anderson und Rowell bestätigt [2]. Josephson hat im Jahre 1973 für seine Entdeckung den Nobelpreis für Physik erhalten.

Die erste Interpretation der Supraleitung als ein makroskopisches Quantenphänomen wurde von London [3] entwickelt. Landau und Ginzburg (Nobelpreise 1963 bzw. 2003) [4] haben die Theorie von London erweitert und damit sehr tiefe Einblicke in die Natur der Supraleitung ermöglicht. Den wichtigsten Beitrag für das mikroskopische Verständnis der Supraleitung lieferten Bardeen, Schrieffer und Cooper (Nobelpreis 1972) [5].

Seitdem wurden viele Anwendungen entwickelt, die auf dem Josephson-Effekt aufbauen. Mit Hilfe von SQUIDs (Superconducting Quantum Interferometer Devices) lassen sich beispielsweise extrem schwache Magnetfelder nachweisen, wodurch sich viele Einsatzfelder in Industrie und Forschung gefunden haben. In der Geologie dienen sie zur Erkundung der tiefen Bodenbeschaffenheit und zur Messung der Magnetisierung von Gesteinsproben. In der Medizin werden sie zur Abbildung magnetischer Signale von Gehirn- und Herzströmen eingesetzt.

Eine neuere noch in der Entwicklung befindliche Anwendung ist die Nutzung von Josephson-Junctions [6] in der Quanteninformation. Diese könnten in Zukunft zur Realisierung eines Quanten-Computers auf der Basis von Festkörpern genutzt werden. Es läßt sich durch Variation der Tunnelbarriere einer supraleitenden Josephson-Junction ein Superpositionszustand von Cooper-Paaren links und rechts der Tunnelbarriere herbeiführen, und damit ein Qubit erzeugen. Für ein ganzes Quantenregister müssten einzelne Josephson Junctions untereinander gekoppelt werden. Die experimentelle Realisierung eines Qubits in einer Josephson-Anordnung ist erstmals 1999 gezeigt worden [7].

Der Josephson-Effekt ist ein Musterbeispiel für schwach gekoppelte, makroskopische Quantensysteme. Die Beschreibung solcher Quantensysteme wurde ursprünglich im Kontext der Supraleitung entwickelt, aber es zeigte sich, daß sie

allgemeiner verstanden und auf verschiedenste Systeme übertragen werden kann [8]. Beispielsweise kann das Verhalten eines Systems schwach gekoppelter Superfluide durch die Josephson Gleichungen charakterisiert werden [9]. Ich werde in dieser Arbeit auf den Josephson-Effekt in Bose-Einstein Kondensaten eingehen.

## Bose-Einstein Kondensation

Das Bose-Einstein-Kondensat ist ein eigener Aggregatzustand eines Systems von Bosonen, in dem sich der überwiegende Anteil der Teilchen im Grundzustand befindet. Theoretisch wurde dieser Zustand 1924 von Bose und Einstein als eine Konsequenz der Statistischen Mechanik vorhergesagt [10, 11]. Bose-Einstein Kondensation ist die makroskopische Besetzung des quantenmechanischen Grundzustandes in einem System von Bosonen. Sie tritt auf, wenn die deBroglie-Wellenlänge  $\lambda_{\text{dB}}$ , die ein Maß für die Ausdehnung der Einteilchen-Wellenfunktion der Atome ist, mit dem mittleren Atomabstand vergleichbar wird. Genauer formuliert tritt dieser Zustand der so genannten Quantenentartung ein, wenn eine kritische Phasenraumdichte erreicht wird:

$$\mathcal{D} = n\lambda_{\text{dB}}^3 = 2.61, \quad \lambda_{\text{dB}} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}.$$

$n$  steht für die Atomzahldichte,  $m$  bezeichnet die Masse eines Atoms und  $T$  die Temperatur des Ensembles. Die für den Quantenphasenübergang entscheidende Größe  $\mathcal{D}$  wird als Phasenraumdichte bezeichnet. Bose-Einstein-Kondensate sind makroskopische Quantenobjekte, die durch eine einzige Wellenfunktion beschrieben werden können. Daraus resultieren faszinierende Eigenschaften wie Suprafluidität und Kohärenz über makroskopische Entfernungen. Die erste experimentelle Realisierung des Bose-Einstein-Kondensats fand 1995 statt [12] und hat der Atomoptik enormen Auftrieb gegeben.

Die ersten Experimente nach der Realisierung von BECs mit Alkaligasen konzentrierten sich auf die makroskopischen Eigenschaften des Kondensats [13, 14, 15, 16]. Später wurde die quantenmechanische Natur des makroskopischen Kondensats untersucht. Die Analogie zwischen der Kohärenz von BECs und von Laserlicht inspirierte dabei zu sehr illustrativen Experimenten, wie der Interferenz von Kondensaten [17, 18] und der Realisierung eines Atomlasers [19, 20, 21].

Weitere Experimente mit BECs beschäftigen sich mit sogenannten Spinorkondensaten. Diese enthalten Atome in mehreren Spinunterzuständen. Das erlaubt die Untersuchung verschiedener Spinnmischungen sowie von deren Wechselwirkungen untereinander [22].

Bis vor kurzem gelang es nur, Atome zu einem BEC zu kondensieren. Ende 2003 entschied sich der Wettlauf mehrerer Arbeitsgruppen um das erste Bose-Einstein-Kondensat aus Molekülen. Aus fermionischen Atomen ließen sich bosonische Molekül-BECs erzeugen [23]. Für Gase aus fermionischen Atomen war die erstmalige Erzeugung eines entarteten Fermi-Gases im Jahr 1999 ein wichtiger

Meilenstein [24]. Dies eröffnet neue Perspektiven beispielsweise für die hochpräzise Molekülspektroskopie, die Interferometrie mit Materiewellen und das Verständnis der Supraleitung.

### Atomoptik

Mittlerweile bietet die Errungenschaft der Bose-Einstein-Kondensation die Möglichkeit Quanteneffekte auf makroskopischen Skalen zu untersuchen [25].

Es stellt sich heraus, daß die Dynamik des BECs durch seine kohärente Natur - die die Voraussetzung für die Beobachtung von Solitonen und Vortices ist - bestimmt wird [26]. Beispielsweise konnte das helle Soliton repulsiv wechselwirkender Atome erstmals mit einem BEC experimentell bestätigt werden [27, 28]. Zudem finden zahlreiche Effekte die aus der Festkörperphysik bekannt sind atomphysikalische Analogien, die mit Hilfe von Kondensaten untersucht werden können. Insbesondere ist die Dynamik von atomaren Materiewellen in periodischen optischen Potentialen in den letzten Jahren in zahlreichen theoretischen und experimentellen Arbeiten untersucht worden [29, 30, 31]. Im Gegensatz zu Systemen aus der Festkörperphysik können in solchen atomoptischen Systemen die periodischen Potentiale experimentell sehr exakt kontrolliert und die Materiewellen direkt im Ortsraum beobachtet werden.

Es können Effekte wie Bloch-Oszillationen und Wannier-Stark-Leitern mit Hilfe kalter Atomwolken in eindimensionalen optischen, periodischen Potentialen untersucht werden [32, 33]. Desweiteren eignet sich das System der periodischen Potentiale zur Manipulation der Dispersion von Materiewellen [34].

Ein weiterer aus der Festkörperphysik bekannter Effekt ist das sogenannte „self-trapping“ von Ladungsträgern. Dieser Begriff wurde 1933 von Landau eingeführt und ist später unter dem Namen Polaron bekannt geworden. Ein Elektron kann im Gitter dort gefangen werden, wo starke Gitterdeformationen auftreten. Landau hat bei der Ursache des self-trapping nicht zwischen extrinsisch hervorgerufenen Gitterdefekten und aufgrund der starken Kopplung des Elektrons an Phononen verursachten effektiven Nichtlinearitäten unterschieden. In beiden Fällen tritt eine Lokalisierung des Elektrons auf. Holstein entwickelte 1959 ein Modell für das nichtlineare self-trapping in eindimensionalen Gittern [35]. Dabei gehorcht die Wellenfunktion des Elektrons einer Gleichung, die heute unter der Bezeichnung „diskrete nichtlineare Schrödinger Gleichung“ (DNLSE) bekannt ist. Das Analogon in der Atomphysik wird als „macroscopic quantum self-trapping“ (MQST) bezeichnet. Es wird die zeitliche Entwicklung eines Wellenpakets untersucht, das von einem tiefen eindimensionalen periodischen Potential moduliert ist. Es stellt sich heraus, daß die Ausdehnung des Wellenpakets bei Erhöhung der nichtlinearen Energie nach einer anfänglichen Verbreiterung zeitlich konstant bleibt. Das System wird ebenfalls durch die DNLSE beschrieben und kann durch die Tunneldynamik zwischen benachbarten Gitterplätzen verstanden werden. Ein solches System bezeichnet man als gekoppelte Boson-Josephson-Junctions (BJJ) [36]. Das MQST mit Bose-Einstein Kondensaten in eindimensionalen periodischen Potentia-

len wurde theoretisch von Trombettoni vorhergesagt und konnte von uns Anfang dieses Jahres erstmals experimentell bestätigt werden [37, 38].

Bis heute konnte das atomoptische Pendant zum supraleitenden Josephson-Effekt noch nicht experimentell nachgewiesen werden. Ziel dieser Arbeit ist die Beobachtung der Tunneldynamik in einer einzelnen BJJ, die mit rein optischen Potentialen verwirklicht wird. Das Tunnelverhalten der Atome in einem Doppelpotential ist stark von der Nichtlinearität des Systems abhängig und auch hier tritt der Effekt des macroscopic quantum self-trapping auf.

### **Gliederung dieser Arbeit**

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Realisierung eines rein optischen Doppelpotentials. Es werden experimentelle Vorarbeiten und theoretische Grundlagen zum Nachweis des Josephson-Effekts in Bose-Einstein Kondensaten vorgestellt.

Die Arbeit gliedert sich folgendermaßen: Im zweiten Kapitel werden die theoretischen Grundlagen der Bose-Einstein Kondensation erläutert. Es folgt eine Vorstellung der klassischen Josephson-Effekte für gekoppelte Supraleiter und die Darstellung des atomoptischen Analogons. Es werden zudem numerische Methoden vorgestellt, die in Simulationen zu den Experimenten Verwendung finden.

Das dritte Kapitel gibt einen Überblick über den experimentellen Aufbau. Es werden Grundlagen zu optischen Dipolfallen und Gittern, sowie die Implementierung des Doppelpotentials erklärt.

Im vierten Kapitel wird auf die Charakterisierung und Kalibrierung des Systems eingegangen, und erste experimentelle Ergebnisse werden präsentiert. Ein Schwerpunkt liegt dabei auf der Frage, inwieweit mechanische Stabilität des Aufbaus Einfluß auf die Untersuchung der Josephson-Oszillationen hat.

# Kapitel 2

## Theoretische Grundlagen

### 2.1 Bose-Einstein Kondensation

Mit der ersten experimentellen Realisierung von Bose-Einstein Kondensaten verdünnter atomarer Gase im Jahr 1995 [12, 39] wurde ein neues Fenster in die Welt der Quantenphysik geöffnet. Die Atome im Kondensat, die sich im gleichen Grundzustand befinden, können durch eine gemeinsame makroskopische Wellenfunktion beschrieben werden. Die makroskopische Besetzung eines Zustands ermöglicht eine direkte Beobachtung der Entwicklung von kohärenten Materiewellenpaketen im Ortsraum. In diesem Abschnitt wird die Theorie der Bose-Einstein Kondensate (BECs) kurz vorgestellt, soweit sie für die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Experimente relevant ist. Ausführliche Diskussionen der Physik von BECs finden sich in zahlreichen Übersichtsartikeln und Büchern, zum Beispiel in [40, 41, 42].

#### 2.1.1 Grundlagen

Bose-Einstein Kondensation beruht auf der Ununterscheidbarkeit und der Wellen- und Teilchennatur von Atomen. Bereits in den Jahren 1924/25 sagten S. Bose [10] und A. Einstein [43] theoretisch voraus, daß in einem homogenen System von Bosonen oberhalb einer kritischen Phasenraumdichte

$$\mathcal{D}_c = n\lambda_{\text{dB}}^3 = \zeta(3/2) \approx 2.612 \quad (2.1)$$

der Grundzustand makroskopisch besetzt sein werde. Dabei bezeichnet  $n$  die räumliche Dichte der Bosonen und

$$\lambda_{\text{dB}} = \left( \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T} \right)^{1/2} \quad (2.2)$$

die thermische deBroglie-Wellenlänge für ein Teilchen der Masse  $m$  in einem Gas der Temperatur  $T$ . Die deBroglie-Wellenlänge  $\lambda_{\text{dB}}$  kann als die Ortsunschärfe angesehen werden, die mit der thermischen Impulsverteilung assoziiert ist. Bei der

kritischen Phasenraumdicke ist  $\lambda_{dB}$  von der Größenordnung des mittleren Teilchenabstands  $n^{-1/3}$ .

Vom experimentellen Standpunkt aus sind BECs in harmonischen Fallen besonders interessant, da sie inhomogene und örtlich begrenzte Systeme darstellen. Dies bewirkt, dass sich der Phasenübergang nicht nur im Impuls-, sondern auch im Ortsraum zeigt. Bei vorgegebener Atomzahl  $N$  tritt die makroskopische Besetzung des Grundzustands in einer dreidimensionalen harmonischen Falle für Temperaturen unterhalb einer kritischen Temperatur

$$T_c = \frac{\hbar\omega_{ho}}{k_B} \left( \frac{N}{\zeta(3)} \right)^{1/3} \approx 0.94 \frac{\hbar\omega_{ho}}{k_B} N^{1/3} \quad (2.3)$$

ein. Dabei ist  $\omega_{ho} = (\omega_x\omega_y\omega_z)^{1/3}$  das geometrische Mittel der Fallenfrequenzen. Gleichung 2.3 gilt für wechselwirkungsfreie Bosonen im thermodynamischen Limes und zeigt, daß die kritische Temperatur  $T_c$  mit der Atomzahl  $N$  abnimmt. Dies erschwert die experimentelle Erzeugung reiner Kondensate mit sehr kleinen Atomzahlen.

### Gross-Pitaevskii-Gleichung

Die Dynamik eines schwach wechselwirkenden BECs kann in Meanfield-Näherung durch die Gross-Pitaevskii-Gleichung (GPE) für den Erwartungswert des Feldoperators  $\Psi(\mathbf{r}, t) = \langle \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \rangle$  beschrieben werden [44, 45, 46].  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  hat die Bedeutung eines Ordnungsparameters und wird auch als die „Wellenfunktion des Kondensats“ bezeichnet, da die Dichte des Kondensats über  $n(\mathbf{r}, t) = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$  gegeben ist. Die GPE enthält verschiedene Näherungen, jedoch stellt sie für kleine Temperaturen ( $T \ll T_c$ ) und große Kondensate ( $N \gg 1$ ) eine gute Approximation dar.

Bei niedriger Temperatur sind in einem verdünnten Gas nur binäre Stöße relevant, so daß die Wechselwirkung durch einen einzigen Parameter, der s-Wellen-Streulänge  $a$ , beschrieben werden kann. Die höher gelegene p-Wellen-Streuung ist aufgrund der niedrigen Energien unterdrückt. Das Atom-Atom-Wechselwirkungspotential  $V(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$  wird dann durch ein Pseudopotential  $g \cdot \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$  ersetzt, wobei die Kopplungskonstante  $g$  durch

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \quad (2.4)$$

gegeben ist. Das Potential ist für negative Streulänge attraktiv und für positive repulsiv. Der Wert von  $a$  kann prinzipiell durch ein statisches externes Magnetfeld mittels Feshbach-Resonanzen experimentell in Betrag und Vorzeichen kontrolliert werden [47, 48, 49]. Bei den in dieser Arbeit verwendeten kleinen Magnetfeldern ist für  $^{87}\text{Rb}$  die Streulänge jedoch immer positiv und konstant ( $a = 5.32 \text{ nm}$ ), so daß im Folgenden nur noch der Fall  $a > 0$  berücksichtigt wird.



Mit den obigen Definitionen und Näherungen lautet die dreidimensionale Gross-Pitaevskii-Gleichung (3D GPE) für ein BEC in einem externen Potential  $V_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$ :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left\{ -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) + g|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right\} \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (2.5)$$

Die Wellenfunktion ist dabei auf die Atomzahl normiert:  $\int |\Psi|^2 d^3r = N$ .

### 2.1.2 Grundzustand eines BECs

Weil über den Grundzustand des BEC schon sehr viel geschrieben wurde [50, 51], werde ich mich hier kurz fassen. Die Wellenfunktion des Kondensats hat die allgemeine Form  $\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})e^{-\frac{i}{\hbar}\mu t}$  mit dem chemischen Potential  $\mu$ . Im idealen wechselwirkungsfreien Fall ist die Wellenfunktion des Kondensats durch  $\sqrt{N}\Psi_0(x)$  gegeben, wobei  $\Psi_0(x)$  die Wellenfunktion des Einteilchen-Grundzustands im Potential bezeichnet. Unabhängig von der Atomzahl würde das Kondensat den dreidimensionalen gaußschen Grundzustand

$$\rho(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2 = \left( \frac{m\omega_{\text{ho}}}{\pi\hbar} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m}{\hbar}(\omega_x x^2 + \omega_y y^2 + \omega_z z^2)\right) \quad (2.6)$$

einnehmen, wobei  $\omega_{\text{ho}} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$  die mittlere Fallenfrequenz darstellt. Die 1/e-Breiten  $\sigma_i = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_i}} = \frac{10.8 \mu\text{m}}{[\sqrt{\text{Hz}}]}$  in den verschiedenen Raumrichtungen wären alleine durch die entsprechenden Fallenfrequenz festgelegt. Für die verwendeten experimentellen Parameter ist dies allerdings nur bei Kondensaten mit weniger als 100 Atomen eine gute Näherung, da die interatomare Wechselwirkung das BEC für typische Atomzahlen  $N \gtrsim 1000$  vergrößert.

Unter Berücksichtigung der nichtlinearen Wechselwirkung gestaltet sich die Berechnung des Grundzustands bzw. der entsprechenden Dichteverteilung mitunter schwierig. Für harmonische Fallen stehen sowohl einige analytische als auch numerische Methoden zur Verfügung [52, 26]. Ein relevanter Parameter für die Wahl der richtigen Methode ist das Verhältnis von nichtlinearer zu kinetischer Energie  $E_{\text{nl}}/E_{\text{kin}}$ .

Bei großer Nichtlinearität ( $E_{\text{nl}} \gg E_{\text{kin}}$ ) können unter Vernachlässigung des kinetischen Terms in der GPE und der Annahme eines harmonischen Fallenpotentials analytische Ausdrücke berechnet werden. In der so genannten **Thomas-Fermi-Näherung** für die 3D-GPE gilt für das chemische Potential, die Radien und die parabolische Dichteverteilung:

$$\mu = \left( \frac{15^2 m a^2 \hbar^4}{32} \right)^{1/5} N^{2/5} \omega_{\text{ho}}^{6/5} \quad (2.7)$$

$$R_{\text{TF},i} = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_i^2}} = \left( \frac{15a\hbar^2}{m^2} \right)^{1/5} \frac{N^{1/5} \omega_{\text{ho}}^{3/5}}{\omega_i} \quad (i = x, y, z) \quad (2.8)$$

$$|\psi|^2 = \rho_0 \left( 1 - \frac{x^2}{R_{TFx}^2} - \frac{y^2}{R_{TFy}^2} - \frac{z^2}{R_{TFz}^2} \right) \quad (2.9)$$

Dabei ist  $\rho_0 = \mu/g$  die maximale Dichte und  $a_{ho} := \sqrt{\hbar/m\omega_{ho}}$  die mittlere Oszillatorlänge. Die Näherung nach Thomas-Fermi ist gut, wenn die Bedingung  $\frac{Na}{a_{ho}} \gg 1$  erfüllt ist.

Ist die Nichtlinearität aufgrund von niedrigen Atomzahlen klein ist, bietet die von **Baym** und **Pethick** [53] vorgeschlagene numerische Methode eine bessere Beschreibung. Die Grundzustandsenergie des Systems in Mean-Field-Näherung erhält man durch die Minimierung des Ginzburg-Pitaevskii-Gross-Energiefunktional. Als Ansatz für die Wellenfunktion des Kondensats dient eine Gaußfunktion

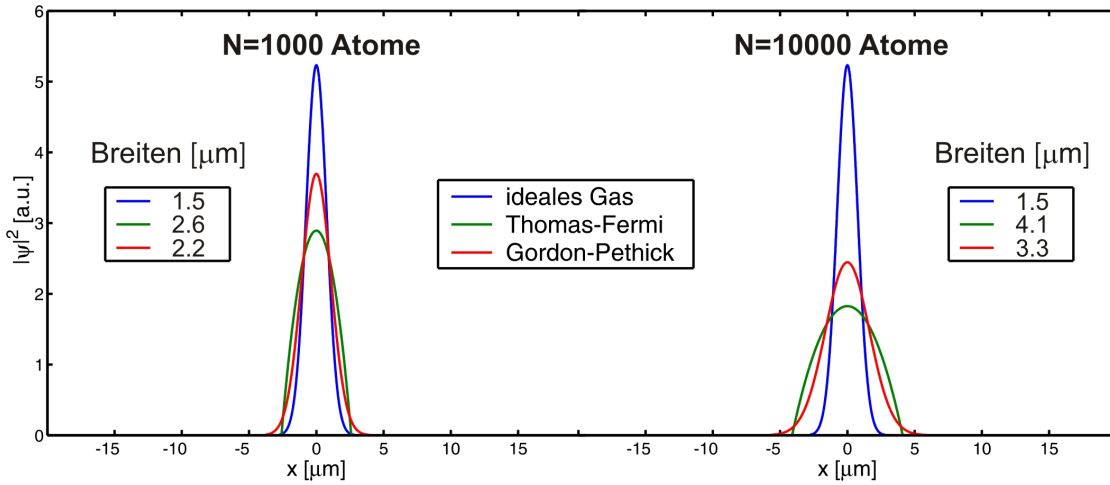
$$\Psi(\mathbf{r}, \tilde{\omega}) = N^{1/2} (\tilde{\omega}_x \tilde{\omega}_y \tilde{\omega}_z)^{1/4} \left( \frac{m}{\pi \hbar} \right)^{3/4} \exp \left[ -\frac{m}{2\hbar} (\tilde{\omega}_x x^2 + \tilde{\omega}_y y^2 + \tilde{\omega}_z z^2) \right], \quad (2.10)$$

deren effektive Fallenfrequenzen  $\tilde{\omega}_i$  variiert werden. Das liefert die minimierte Energie als Funktion der gesuchten effektiven Fallenfrequenzen. Diese sind bei repulsiver Wechselwirkung immer kleiner als die Fallenfrequenzen  $\omega_i$  des Potentials. Gegenüber dem wechselwirkungsfreien Fall ist der Grundzustand weiter ausgedehnt und die Dichte im Fallenzentrum niedriger.

Der Einfluß der interatomaren Wechselwirkung auf die Dichteverteilung in einer harmonische Falle ist in Abb. 2.1 graphisch illustriert. Die Fallenfrequenzen sind in allen Richtungen identisch und betragen  $\omega_i = 2\pi \cdot 100$  Hz. Das Verhältnis von nichtlinearer zu kinetischer Energie  $\frac{Na}{a_{ho}}$  beträgt für  $N = 1 \cdot 10^4$  Atome 53 (bzw. 5 für  $N = 1 \cdot 10^3$  Atome). Für große Atomzahlen gibt die 3D Thomas-Fermi-Näherung die Realität sehr gut wieder [41]. Bei kleinen Atomzahlen überschätzt sie die wirkliche Breite des Grundzustands und die numerische Näherung von Baym/Pethick ist besser geeignet. Die wechselwirkungsfreie Beschreibung für Atomzahlen größer als  $N = 100$  ist keine gute Abschätzung.

### 2.1.3 Healing-Länge

Wir haben die Wellenfunktion eines BECs in einem harmonischen Potential betrachtet. Jetzt untersuchen wir den Fall, daß sich das Kondensat in einem Kastential mit unendlich hohen Potentialwänden befindet. An den Wänden muß die Wellenfunktion verschwinden und im Inneren des Kastens ihren maximalen Wert erreichen. Im wechselwirkungsfreien Fall hat die Wellenfunktion die Form eines Sinus und der Bereich auf dem sie von ihrem Maximalwert auf null abfällt, entspricht für den Grundzustand der Hälfte der Kastenbreite. Bei Berücksichtigung der repulsiven Wechselwirkung wird dieser Bereich in Abhängigkeit der Atomzahl dementsprechend kleiner weil die Form der Wellenfunktion durch die Konkurrenz von kinetischer und nichtlinearer Energie ( $\sim ng$ ) bestimmt wird. Mit Hilfe der GPE kann die Distanz auf der diese Änderung der Wellenfunktion erfolgt abgeschätzt werden. Man bezeichnet sie als Healing-Länge  $\xi$ . Über die Unschärferelation kann die Größenordnung der kinetischen Energie eines Teilchens zu  $\hbar^2/2m\xi^2$  abgeschätzt



**Abbildung 2.1:** Das Profil des Betragsquadrats der Grundzustandswellenfunktion in  $x$ -Richtung eines BECs in einer harmonischen Falle mit den Fallenfrequenzen  $\omega_i = 2\pi \cdot 100 \text{ Hz}$  ( $i = x, y, z$ ) in den verschiedenen Näherungen für zwei verschiedene Atomzahlen. Die Wellenfunktion ist jeweils auf eins normiert. Diese Darstellung veranschaulicht sehr eindrucksvoll, wie die repulsive interatomare Wechselwirkung, im Vergleich zum idealen Gas (blau), die zentrale Dichte reduziert und die Ausdehnung des Grundzustands vergrößert. Für große Atomzahlen ( $N = 1 \cdot 10^4$ ) ist die Bedingung  $\frac{Na}{a_{\text{ho}}} \simeq 54 \gg 1$  gut erfüllt und die 3D Thomas-Fermi-Näherung entspricht in diesem Fall nahezu der wirklichen Verteilung. Bei kleinen Atomzahlen  $N = 1 \cdot 10^3$  und  $\frac{Na}{a_{\text{ho}}} \simeq 5$  überschätzt sie die wirkliche Breite des Grundzustands und die numerische Näherung von Baym/Pethick ist besser geeignet.

werden. Gleichsetzen von nichtlinearer und kinetischer Energie liefert die Healing-Länge des Kondensats:

$$\xi = \sqrt{\frac{1}{8\pi an}} \quad (2.11)$$

Sie ist ein Maß für die Entfernung, auf der die Wellenfunktion des Kondensats ihr Maximum erreicht, wenn sie durch eine lokale Störung „verletzt“ wird. Sie beträgt für ein BEC aus 1000  $^{87}\text{Rb}$  Atomen und einem Radius von  $1 \mu\text{m}$  ungefähr  $\xi = 0.18 \mu\text{m}$ .

### 2.1.4 Kollektive Anregungen

Vor fast 60 Jahren hat Bogoliubov seine Theorie für kollektive Anregungen in verdünnten Bose-Gasen entwickelt [54]. Ihre Überprüfung wurde mit der Erzeugung von BECs möglich. Mittlerweile hat sich die Untersuchung kollektiver Anregungen zu einem neuen Forschungsfeld entwickelt. Aufgrund der Komplexität der theoretischen Beschreibung kollektiver Anregungen verweise ich auf die Lektüre zahlreicher Artikel sowie Bücher, z. B. [42, 55, 56, 57] und werde an dieser Stelle

nur auf die für unser Experiment nötigen Punkte eingehen. Es gibt im Wesentlichen drei interessante Arten der kollektiven Anregung bei BECs. Als erstes ist die Schwerpunktbewegung des Kondensates in der Atomfalle zu nennen. Diese ist für uns von großer Relevanz, da sie eine Möglichkeit bietet die Fallenfrequenzen mit hoher Genauigkeit zu vermessen. Das Kondensat wird aus seiner Ruhelage ausgelenkt und sein Schwerpunkt oszilliert in der Falle. Desweiteren kann die Form des BECs variieren. Diese Art der Anregung tritt als periodische Änderung seiner Ausdehnungen in den drei Raumrichtungen in Erscheinung. Die Ausbreitung von Schallwellen im Kondensat ist die dritte Anregungsform. Eine entscheidende Rolle für die Eigenschaften kollektiver Anregungen spielt die Temperatur des betrachteten atomaren Ensembles und der relative Anteil an thermischen Atomen. Letzteres hat vor allem großen Einfluß auf die Dämpfung der Schwingung. Die Art der Anregung ist vom Regime abhängig in dem man sich befindet und wird von der Hierarchie dreier unterschiedlicher Längenskalen vorgegeben. Diese sind die Amplitude  $\lambda_{\text{ex}}$  der Schwingung, die mittlere freie Weglänge  $l_{\text{mfp}}$  zwischen kollektiver Anregung und dem thermischen Anteil des Kondensats und die Healing-Länge  $\xi = 1/\sqrt{8\pi an}$ . Deren relative Verhältnisse definieren als Extremalwerte das hydrodynamische ( $\xi < l_{\text{mfp}} \ll \lambda_{\text{ex}}$ ) und kollisionslose ( $\xi < \lambda_{\text{ex}} \ll l_{\text{mfp}}$ ) Regime.

Für unser Experiment ist die periodische Änderung der Form des BECs von Bedeutung. Wir können Quadrupolmoden niedriger Energie beobachten. Zu dessen Charakterisierung bezeichnet man mit  $m$  den Drehimpuls der Anregung um die axiale  $z$ -Achse. Bei der zylindersymmetrischen  $m = 0$  Mode oszillieren axiale und radiale Ausdehnung des Kondensats um  $\Delta\Phi = \pi$  phasenverschoben. (Bei der  $m = 2$  Mode ist die Zylindersymmetrie gebrochen und es oszillieren die beiden radialen Richtungen des Kondensats phasenverschoben. Diese wird aber von uns nicht beobachtet.) Stringari [57] hat für die  $m = 0$  Mode einen Ausdruck gefunden, der die Frequenz der Quadrupolmode als Funktion des Verhältnisses von kinetischer zu potentieller Energie des Grundzustands im harmonischen Potential angibt.

$$\omega_{qp} = \omega_0 \sqrt{2 \left( 1 + \frac{E_{\text{kin}}}{E_{\text{pot}}} \right)} \quad (2.12)$$

Bei der Abwesenheit der interatomaren Wechselwirkung gilt  $E_{\text{kin}} = E_{\text{pot}}$  und man erhält  $\omega_{qp} = 2\omega_0$ . Ist die Wechselwirkung repulsiv und die Zahl der Atome in der Falle ausreichend groß, dann kann die kinetische Energie vernachlässigt werden und Gleichung 2.12 ergibt  $\omega_{qp} = \sqrt{2}\omega_0$ . Letzteres Ergebnis entspricht der Vorhersage der hydrodynamischen Theorie. Es ist nicht trivial das genaue Verhältnis von  $E_{\text{kin}}/E_{\text{pot}}$  zu bestimmen. In Kenntnis sämtlicher Fallenparameter und der Atomzahl muß der exakte Grundzustand des Systems berechnet werden.

Man kann jedoch folgende Abschätzung vornehmen. Die kinetische Energie ist proportional zu  $R^{-2}$  und die potentielle Energie proportional zu  $R^2$ . Das Verhältnis  $E_{\text{kin}}/E_{\text{pot}}$  skaliert dementsprechend mit  $R^{-4}$  [42].  $R$  ist der Radius des Kondensats im Grundzustand und kann mit den in Abschnitt 2.1.2 beschriebenen Näherungsmethoden berechnet werden. Im wechselwirkungsfreien Fall ist er durch

die Oszillatorlänge  $a_{\text{ho}} = \sqrt{\hbar/m\omega_{\text{ho}}}$  gegeben. Unter Berücksichtigung der repulsiven Wechselwirkung wird die Ausdehnung des Grundzustands zunehmen und man kann das Energieverhältnis in Gleichung 2.12 abgeschätzt.

## 2.2 Josephson Gleichungen

### 2.2.1 Gekoppelte makroskopische Quantensysteme

Wir folgen einer allgemeinen für zwei beliebige schwach gekoppelte makroskopische Quantensysteme gültigen Herleitung, die auf Feynman [8] zurückgeht und in zahlreichen Veröffentlichungen und Lehrbüchern ebenfalls beschrieben wird [6, 58]. Wir gehen von der Annahme aus, daß ein Teilchen sich in einem von zwei Quantensystemen aufhält, die schwach miteinander gekoppelt sind. In beiden Systemen beschreiben Paarwellenfunktionen  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  die entsprechenden nicht gekoppelten Zustände. Demzufolge kann  $|\Psi_i|^2$  mit der momentanen Teilchenzahldichte  $\rho_i$  identifiziert werden. Der Ket  $|1\rangle$  ( $|2\rangle$ ) bezeichnet den Basiszustand des linken (rechten) Systems. Dann gilt:

$$\langle 1|\Psi_1^*\Psi_1|1\rangle = |\Psi_1|^2 = \rho_1 \quad \langle 2|\Psi_2^*\Psi_2|2\rangle = |\Psi_2|^2 = \rho_2 \quad (2.13)$$

Die schwache Kopplung zwischen den Systemen ermöglicht Übergänge zwischen den Zuständen  $|1\rangle$  und  $|2\rangle$ . Schwache Kopplung bedeutet in diesem Zusammenhang, daß der Überlapp der Wellenfunktionen zwischen den Systemen klein ist. Der allgemeine Zustandsvektor dieses Zwei-Niveau-Systems lautet

$$|\Psi\rangle = \Psi_1|1\rangle + \Psi_2|2\rangle. \quad (2.14)$$

Die Zeitentwicklung dieses Systems wird durch die Schrödinger Gleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = H|\Psi\rangle \quad (2.15)$$

mit dem Gesamt-Hamiltonian

$$H = H_1 + H_2 + H_T, \quad (2.16)$$

beschrieben.  $H_i = E_i|i\rangle\langle i|$  ( $i = 1, 2$ ) bezeichnet den Hamiltonoperator des ungekoppelten Zustands  $|i\rangle$  des jeweiligen Systems mit seiner Grundzustandsenergie  $E_i$ .

$$H_T = K[|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|] \quad (2.17)$$

beschreibt die Wechselwirkung zwischen den beiden Zuständen.  $K$  ist ein Maß für die Kopplungsstärke und ihre Größe von den spezifischen Eigenschaften der gekoppelten Systeme abhängig. Unter Berücksichtigung der Projektion auf die Basis  $\{|1\rangle, |2\rangle\}$  wird Gl. 2.15 zu

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_1 = E_1 \Psi_1 + K \Psi_2 \quad (2.18)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_2 = E_2 \Psi_2 + K \Psi_1.$$

$\Psi_1$  und  $\Psi_2$  lassen sich durch  $\Psi_1 = \sqrt{\rho_1} e^{i\Phi_1}$  und  $\Psi_2 = \sqrt{\rho_2} e^{i\Phi_2}$  substituieren. Die Trennung von Real- und Imaginärteil liefert

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = -\frac{2}{\hbar} K \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin \phi \\ \dot{\rho}_2 = \frac{2}{\hbar} K \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin \phi \end{cases} \quad (2.19)$$

$$\begin{cases} \dot{\Phi}_1 = -\frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \cos \phi + \frac{E_2 - E_1}{\hbar} \\ \dot{\Phi}_2 = -\frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \cos \phi - \frac{E_2 - E_1}{\hbar} \end{cases} \quad (2.20)$$

mit der Phasendifferenz  $\phi = \Phi_1 - \Phi_2$ . Bei makroskopischen Quantensystemen kann man  $E_2 - E_1$  mit der Differenz der chemischen Potentiale  $\Delta\mu$  identifizieren. Für den Teilchenstrom  $J$  gilt

$$J \equiv \dot{\rho}_1 = -\dot{\rho}_2$$

bzw.

$$J = \frac{2K}{\hbar} \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin \phi = J_C \sin \phi \quad (2.21)$$

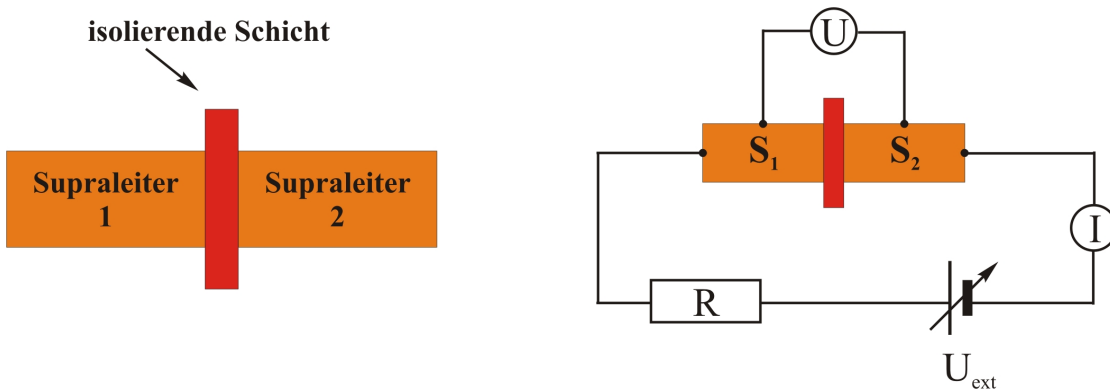
mit dem kritischen Strom  $J_C = \frac{2K}{\hbar} \sqrt{\rho_1 \rho_2}$ . Die Phasendifferenz  $\phi$  entwickelt sich mit der Zeit nach

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi = -\frac{\Delta\mu}{\hbar}. \quad (2.22)$$

Obwohl diese Gleichungen aus dem Kontext schwach gekoppelter Systeme hervorgehen, sind sie allgemeinerer Natur. Sie beschreiben die Phasenentwicklung in einem makroskopischen Quantensystem (BEC, Superfluid, Supraleiter). Da das chemische Potential mit der Energiedifferenz von Teilchen an zwei verschiedenen Orten verknüpft ist, existiert eine makroskopische Wellenfunktion, die das System beschreibt und ihre zeitabhängige Phase, wie im Einteilchen-Fall, mit  $e^{-iEt/\hbar}$  ändert.

### 2.2.2 Klassische Josephson-Effekte

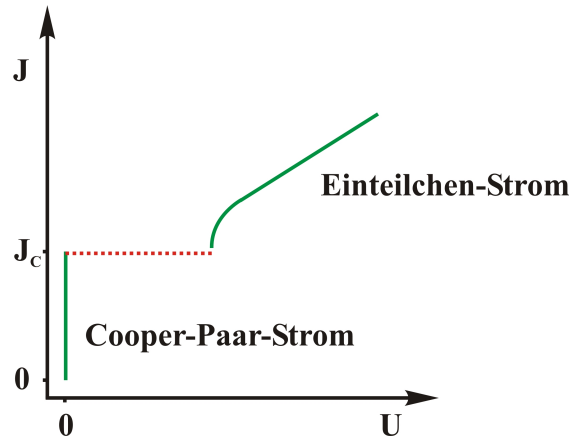
Für die theoretische Beschreibung der in einem supraleitenden Josephson Kontakt (SJJ) (Abb. 2.2) auftretenden Effekte kann das oben hergeleitete Modell für schwach gekoppelte Quantensysteme verwendet werden. Ich werde an dieser Stelle die Josephson Effekte nicht anhand der von Bardeen, Cooper und Schrieffer



**Abbildung 2.2:** Hier ist ein Schema der Grundschaltung zur Beobachtung der Josephson Effekte dargestellt. Über einen Widerstand  $R$  wird eine externe Spannung  $U_{ext}$  an die durch eine isolierende Schicht getrennten Supraleiter  $S_1$  und  $S_2$  angelegt. Die Dicke des Dielektrikums beträgt ungefähr  $10 \text{ \AA}$ . Es kann sowohl der Strom  $I$  durch den Kontakt als auch die über die Tunnelbarriere abfallende Spannung  $U$  gemessen werden.

entwickelten mikroskopischen Theorie diskutieren [5]. Der Josephson-Effekt beschreibt das Phänomen des Tunnelstroms von Cooper Paaren zwischen zwei Supraleitern. Er wurde von Josephson 1962 theoretisch vorhergesagt (Nobelpreis für Physik 1973)[1] und wurde 1963 von Anderson und Rowell experimentell bestätigt [2]. Darauf aufbauend wurden seitdem zahlreiche Anwendungen entwickelt, wie z. B. die so genannten SQUIDs (Superconducting Quantum Interferometer Devices). Unter anderem lassen sich mit deren Hilfe extrem empfindliche Magnetometer bauen. Viele Artikel und Lehrbücher setzen sich mit den Josephson-Effekten und deren Anwendungen auseinander. Betrachtet werden zwei Supraleiter  $S_1$  und  $S_2$ , die durch eine isolierende, ausreichend dünne Schicht (z. B. Dielektrikum) von zirka  $30 \text{ \AA}$  voneinander getrennt sind. Für einzelne Elektronen stellt diese Schicht eine Tunnelbarriere dar, die mit einer entsprechenden Wahrscheinlichkeit überwunden werden kann. Bei weiterer Annäherung der beiden Supraleiter bis auf ungefähr  $10 \text{ \AA}$  können zusätzlich Cooper-Paare von einem Supraleiter zum anderen fließen, das ist das so genannte Josephson Tunneln. Man spricht bei dieser Konstellation von einer „Josephson Junction“. Dies stellt ein schwach gekoppeltes System dar, da die Tunnelwahrscheinlichkeit eines Cooper-Paares durch die Barriere nur sehr gering ist. Die Phase in den Supraleitern kann sich jetzt nicht mehr unabhängig voneinander entwickeln. Es besteht also eine Phasenkorrelation zwischen den Supraleitern, die sich durch das Dielektrikum überträgt.

Für eine symmetrische Anordnung aus zwei gleichen Supraleitern, die mit  $\Delta U$  vorgespannt sind, verschieben sich in beiden Supraleitern die Grundzustandsenergien gegeneinander, und das chemische Potential eines Cooper-Paares ist durch  $\Delta\mu = 2e\Delta U$  gegeben. Mit  $\rho \equiv \rho_1 = \rho_2$  und  $J_C = \frac{2K}{\hbar}\rho$  erhält man aus 2.21 und



**Abbildung 2.3:** Schematische Darstellung der Strom-Spannungs-Charakteristik einer Josephson-Junction unter DC Bedingungen. Der Cooper-Paar Tunnelstrom steigt mit wachsender externer Spannung  $U_{ext}$  bis zu einem kritischen Wert  $J_C$  an, ohne einen Spannungsabfall über dem Tunnelkontakt nach sich zu ziehen. Bei weiterer Erhöhung des Stroms tritt ein Spannungsabfall über dem Tunnelkontakt auf und der Strom stellt sich auf  $J(R)$  ein. Der Tunnelstrom wird nicht mehr von Cooper-Paaren getragen, sondern resultiert aus tunnelnden Einzelelektronen. Die Strom-Spannungs-Kennlinie zeigt dann quasiohmsches Verhalten.

2.22 die klassischen Josephson-Gleichungen:

$$J = J_C \sin \phi \quad (2.23)$$

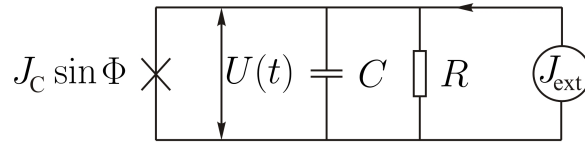
$$\dot{\phi} = \frac{2e\Delta U}{\hbar} \quad (2.24)$$

In der Grundschialtung zur Beobachtung der Josephson Effekte (siehe Abb. 2.2) wird eine äußere Spannung  $U_{ext}$  über einen äußeren Widerstand  $R$  an den „Tunnelkontakt“  $S_1/S_2$  gelegt. Es kann sowohl der Strom  $I$  durch den Kontakt als auch die über die Tunnelbarriere abfallende Spannung  $U$  gemessen werden. Wegen des starken Einflusses auf die kohärenten Cooper-Paar-Zustände müssen unkontrollierte Magnetfelder im Bereich der Tunnelbarriere sehr gut abgeschirmt werden. Schon Felder von der Größenordnung von 1 Gauss (Erdmagnetfeld) verhindern die Beobachtung der Josephson Effekte.

### DC und AC Josephson-Effekt

Obwohl bei der Herleitung der Josephson-Gleichungen  $\rho_1$  und  $\rho_2$  als konstant angenommen werden, ist deren zeitliche Ableitung von Null verschieden. Wir gehen davon aus, dass mit der angeschlossenen Stromquelle durch die Barriere tunnelnde Cooper-Paare instantan ersetzt werden. Der Tunnelstrom ist stationär. Die





**Abbildung 2.4:** Resistively Shunted Josephson Junction.

Josephson-Gleichungen haben auch bei verschwindender Spannung ( $U = 0$ ) über der Tunnelbarriere einen Stromfluß als Lösung zur Folge. Das bedeutet, es setzt unmittelbar nach Schließen des Kontakts ein Tunnelstrom von Cooper-Paaren ein, dessen Richtung von der Phasendifferenz  $\phi$  zwischen den Supraleitern abhängt und einen maximalen Wert von  $J_C$  annehmen kann. Hierbei fällt keine Spannung  $U$  über dem Tunnel-Kontakt ab, wenngleich jedoch im äußeren Stromkreis die Spannung  $U_{ext}$  anliegt. Das ist der dc Josephson-Effekt. Wird dieser kritische Josephson-Strom  $J_0$  bei weiterer Erhöhung von  $U_{ext}$  überschritten, tritt ein Spannungsabfall über dem Tunnelkontakt auf, der Strom stellt sich dann auf  $J(R)$  ein und zeigt ein quasiohmsches Verhalten. Dieser Strom rührt nicht mehr von tunnelnden Cooper-Paaren her, sondern resultiert aus tunnelnden Einzelelektronen (Abb. 2.3).

Wird eine Spannung von  $U \neq 0$  angelegt, so wurde von Josephson die erstaunliche Vorhersage gemacht, dass im Kontakt ein hochfrequenter Wechselstrom auftritt; der ac Josephson Effekt. Durch Integration von Gl. 2.22 folgt für die Phasendifferenz

$$\phi = \frac{2e\Delta U}{\hbar}t + \Phi_0 \quad (2.25)$$

und infolgedessen tritt ein Wechselstrom mit der Frequenz  $\omega = 2\pi\nu = \frac{2e\Delta U}{\hbar}$  in Erscheinung

$$J = J_C \sin\left(\frac{2eU}{\hbar}t + \phi_0\right) \quad (2.26)$$

Bei einem typischen Spannungsabfall von  $U = 1$  mV über den Kontakt ergibt sich eine Kreisfrequenz für diesen Josephson Wechselstrom von  $\omega = 3 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}$ , d.h. Schwingungen im langwelligen IR-Bereich.

### Das RSJ-Modell

Die Idee, die dem im Folgenden beschriebenen Modell zugrunde liegt, ist die Frage nach der Existenz eines Ersatzschaltbildes, das die beobachtete Strom-Spannungs-Charakteristik eines realen Josephson-Kontakts erklären kann. Das Modell veranschaulicht den Zusammenhang zwischen dem durch den Josephson-Kontakt fließenden Strom und der über ihn abfallenden Spannung. Dazu nutzt es eine Kombination aus Schaltungselementen, wie Widerstand und Kapazität, die mit dem Josephson Element parallel geschaltet werden (Abb. 2.4). Durch diese Parallelschaltung fließt ein externer Strom  $J_{ext}$ . Man spricht von einer „Resistively Shunted Josephson Junction“ (RSJ). Nach Kirchhoff lautet die Gleichung der an den

Elektrisches Analogon	Mechanisches Analogon
Gesamtstrom $J_{\text{ext}}$	$T_A$ äußeres Drehmoment
Kapazität $C$	$I$ Trägheitsmoment
Leitfähigkeit $\frac{1}{R}$	$D$ Dämpfung
maximaler Josephson-Strom $J_C$	$mgl$ maximales Drehmoment aufgrund von Gravitation
Phasendifferenz $\phi$	$\theta$ Auslenkung

**Tabelle 2.1:** Äquivalenz zwischen physikalischen Größen in elektrischer und mechanischer Analogie

verschiedenen Elementen auftretenden Ströme:

$$J_{\text{ext}} = C \frac{dU(t)}{dt} + \frac{U(t)}{R} + J_C \sin(\phi(t)) \quad (2.27)$$

$CdU/dt$  ist der Verschiebungsstrom durch den Kondensator  $C$ ,  $U(t)/R$  der Strom durch den Widerstand  $R$  und  $J_C \sin(\phi(t))$  der Josephson Suprastrom. Die momentan abfallende Spannung lautet  $U(t)$  und ist durch den Zusammenhang 2.24 direkt mit der Phasendifferenz  $\phi(t)$  verknüpft, womit Gleichung 2.27 in Abhängigkeit der Phasendifferenz formuliert werden kann:

$$J_{\text{ext}} = \frac{\hbar}{2e} C \frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{\hbar}{2e} \frac{1}{R} \frac{d\phi}{dt} + J_0 \sin(\phi(t)) \quad (2.28)$$

Diese Differentialgleichung beschreibt in exakter Analogie die Bewegung eines getriebenen, gedämpften, starren Pendels der Länge  $l$  mit Masse  $m$ .  $\theta$  ist der Winkel, den das Pendel mit der Vertikalen einschließt und damit ein Maß für die Auslenkung. Seine Bewegung gehorcht der Gleichung

$$T_A = I \frac{d^2\theta}{dt^2} + D \frac{d\theta}{dt} + mgl \sin \theta. \quad (2.29)$$

Hierbei ist  $T_A$  das von außen angelegte Drehmoment,  $mgl \sin \theta$  das Rückstellmoment und  $D$  das Drehmoment, welches aufgrund der Dämpfung in Erscheinung tritt. Die Äquivalenz zwischen den jeweils auftretenden physikalischen Größen der beiden analogen Systeme ist in der Tabelle 2.1 aufgelistet.

## 2.3 Josephson Effekt im Doppelmuldenpotential

Wie bereits erwähnt sind die Josephson-Effekte (JE) ein Musterbeispiel für Phasenkohärenz, die bei makroskopischen Systemen in Erscheinung tritt. In Supraleitern [6] und schwach gekoppelten  $^3\text{He}$ -Reservoirien [9] sind JE schon beobachtet

worden. Schwach wechselwirkende Bose-Einstein Kondensate bieten eine weitere Möglichkeit für die Untersuchung von JE. Die schwache Kopplung wird durch ein optisch erzeugtes Doppelmuldenpotential realisiert. So genannte Boson-Josephson-Junctions (BJJ) und ihre Dynamik können durch eine Zwei-Moden-Gross-Pitaevskii-Gleichung beschrieben werden. BJJ ermöglichen die Untersuchung eines bestimmten Regimes von Phasen- und Besetzungszahldifferenzen zwischen den Potentialtöpfen, die mit supraleitenden Josephson-Junctions (SJJ) nicht zugänglich wären. Dazu gehören Effekte, wie  $\pi$ -Oszillationen und „macroscopic quantum self-trapping“ (MQST), die von Smerzi et. al. theoretisch vorhergesagt wurden [59] und im Folgenden näher erläutert werden.

### 2.3.1 Die Boson-Josephson-Junction

Die Wellenfunktion  $\Psi(r, t)$  für ein wechselwirkendes BEC in einem Fallenpotential  $V_{\text{trap}}$  bei der Temperatur  $T = 0$  gehorcht der GPE

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(r, t) = \left\{ -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{trap}}(r, t) + g|\Psi(r, t)|^2 \right\} \Psi(r, t). \quad (2.30)$$

$V_{\text{trap}}$  ist im Folgenden ein Doppeltopfpotential, wie es beispielsweise durch ein optisches Gitter und die Überlagerung einer Dipolfalle erzeugt werden kann. Da wir an der Dynamik von zwei gekoppelten BECs interessiert sind, läßt sich  $\Psi(r, t)$  aus jeweils einer nach Ort und Zeit separierten Wellenfunktionen superponieren, die das BEC im jeweiligen Potentialtopf beschreibt. Aufgrund der Nichtlinearität der GPE gilt das Superpositionsprinzip im Allgemeinen nicht. Berücksichtigt man jedoch die schwache Kopplung, die sich in der geringen Dichte des BEC innerhalb der Tunnelbarriere manifestiert, kann die nichtlineare Wechselwirkung in der Barriere vernachlässigt werden. Der folgende Ansatz ist demnach gerechtfertigt.

$$\Psi(r, t) = \psi_1(t)\Phi_1(r) + \psi_2(t)\Phi_2(r) \quad (2.31)$$

Die räumliche Abhängigkeit von  $\Phi_{1,2}$  kann aus den stationären, symmetrischen  $\Phi_+(r)$  und antisymmetrischen  $\Phi_-(r)$  Eigenzuständen der GPE konstruiert werden. Sie sind auf eins normiert, was ebenfalls für  $\Phi_{1,2} = (\Phi_+ \pm \Phi_-)/2$  gilt ( $\int |\phi_i|^2 dr = 1$ ). Das Überlappintegral  $\int \phi_1 \phi_2 dr \simeq 0$  verschwindet („tight-binding-approximation“).

Die  $\psi_{1,2} = \sqrt{N_{1,2}} e^{i\theta_{1,2}}$  beschreiben die Zeitabhängigkeit mit den Besetzungszahlen der Potentialtöpfe  $N_{1,2}$ . Die Gesamtatomzahl lautet  $N_1 + N_2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 \equiv N_T$ . Daraus folgt für Amplituden allgemeiner Besetzungen  $N_{1,2}$  und Phasen  $\theta_{1,2}$  die Zwei-Moden-Gleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_1 = (E_1^0 + U_1 N_1) \psi_1 - K \psi_2 \quad (2.32)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_2 = (E_2^0 + U_2 N_2) \psi_2 - K \psi_1$$

Effekte, die aus Dämpfung und der Abweichung vom absoluten Temperaturnullpunkt resultieren, finden keine Berücksichtigung.  $E_{1,2}^0$  entsprechen den Grundzustandsenergien im jeweiligen Potentialtopf und  $U_{1,2}N_{1,2}$  den nichtlinearen Energien jeder Seite.  $K$  bezeichnet das Matrixelement der Kopplung und hat die Dimension einer Energie. Diese Parameter sind konstant und von der Gesamtatomzahl  $N_T$  sowie der Geometrie des Systems abhängig. Ihre Definitionen sind:

$$\begin{aligned} E_{1,2}^0 &= \int \left[ \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \Phi_{1,2}|^2 + |\Phi_{1,2}|^2 V_{\text{trap}} \right] dr \\ U_{1,2} &= g \int |\Phi_{1,2}|^4 dr \\ K &= - \int \left[ \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \Phi_1 \nabla \Phi_2) + \Phi_1 V_{\text{trap}} \Phi_2 \right] dr \end{aligned} \quad (2.33)$$

Für nicht wechselwirkende Atome kann  $K$  als lineare Tunnelzeit angesehen werden. Dann beschreiben die Gln. 2.32 sinusförmige Rabi-Oszillationen zwischen den Potentialtöpfen mit der Frequenz  $\nu_L = \tau_L^{-1} = \frac{2}{\hbar K}$ . Für unser System liegt  $\tau_L$  in der Größenordnung von  $\sim 100$  ms.

Schließlich führt man die Besetzungszahldifferenz

$$z(t) = \frac{N_1(t) - N_2(t)}{N_T} \equiv \frac{|\Psi_1|^2 - |\Psi_2|^2}{N_T}, \quad z(t) \in [-1, 1] \quad (2.34)$$

ein. Die Extremalwerte  $\pm 1$  bedeuten, daß sich alle Atome in einem Potentialtopf aufhalten. Die relative Phase zwischen den Töpfen wird zu

$$\phi(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t), \quad \phi(t) \in [0, 2\pi] \quad (2.35)$$

definiert. Die Zeit  $t \rightarrow \frac{2K}{\hbar}t$  wird zu einer dimensionslosen Zeit reskaliert. Das führt zu zwei gekoppelten Differentialgleichungen für  $z$  und  $\phi$ :

$$\dot{z}(t) = -\sqrt{1 - z^2(t)} \sin[\phi(t)] \quad (2.36)$$

$$\dot{\phi}(t) = \Delta E + \Lambda z(t) + \frac{z(t)}{\sqrt{1 - z^2(t)}} \cos[\phi(t)] \quad (2.37)$$

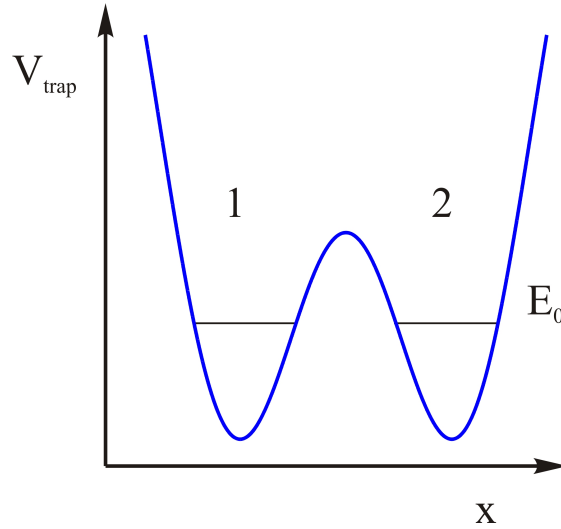
Die ebenfalls dimensionslosen Parameter  $\Delta E$  und  $\Lambda$  legen das Regime fest, in dem Tunneln für das BEC möglich ist:

$$\Delta E = \frac{(E_1^0 - E_2^0)}{2K} + \frac{U_1 - U_2}{4K} N_T \quad (2.38)$$

$$\Lambda = \frac{UN_T}{2K} \quad \text{mit} \quad U \equiv \frac{U_1 + U_2}{2} \quad (2.39)$$

Die Gesamtenergie des Systems lautet:

$$H_0 = \frac{\Lambda z^2}{2} + \Delta E z - \sqrt{1 - z^2} \cos \phi \quad (2.40)$$



**Abbildung 2.5:** Zur Illustration ist das symmetrische Doppelmuldenpotential mit seinen Grundzustandsenergien  $E_0$  dargestellt. Bei unserem Experiment wird es mit optischen Dipolfallen realisiert.

Das läßt darauf schließen, daß eine Parallele zur klassischen Mechanik vorhanden ist: Kanonisch konjugierte Orts- und Impuls-Variablen. Die Bewegungsgleichungen 2.36 und 2.37 lassen sich demnach auch in adäquater Form ausdrücken:

$$\dot{z} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} \quad \text{und} \quad \dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial z} \quad (2.41)$$

Die Gleichungen 2.36 und 2.37 liefern eine vollständige Beschreibung der Tunneldynamik. Ebenso wie die „einfache“ sinusförmige Oszillation gehen auch Effekte wie anharmonische Schwingungen und das MQST aus ihnen hervor.

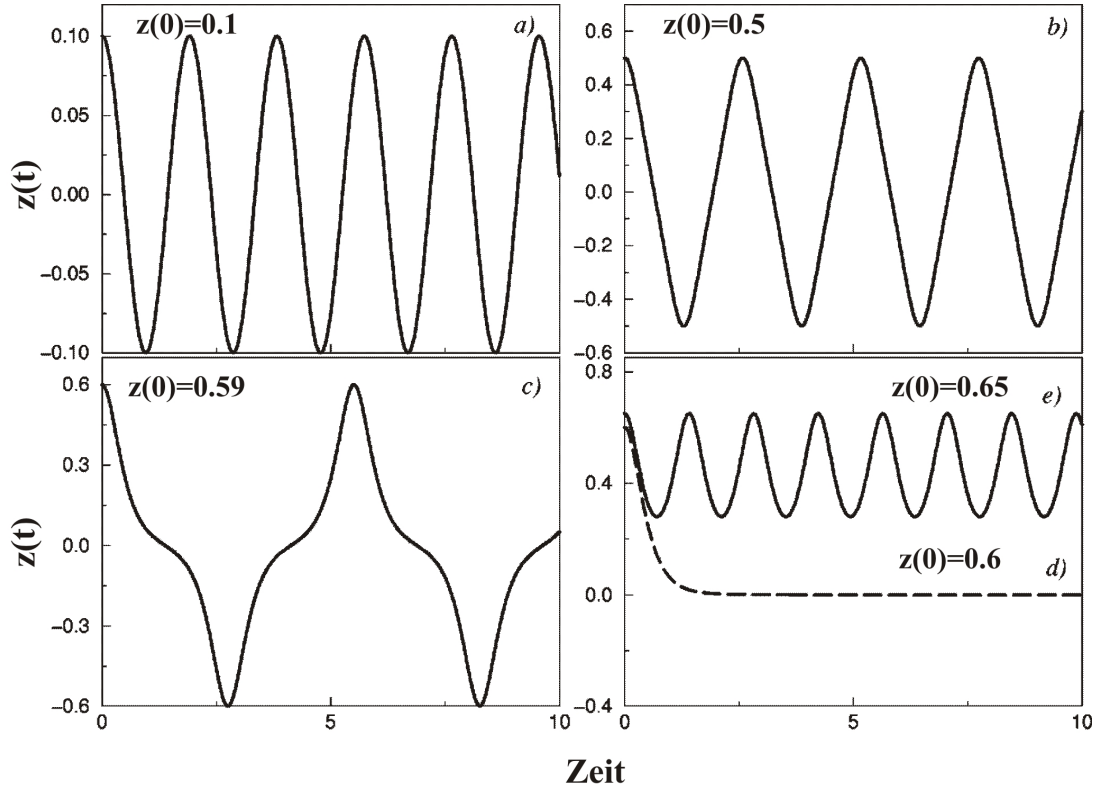
### Symmetrisches Doppeltopfpotential

Für den symmetrischen Fall vereinfachen sich die Differentialgleichungen 2.36 und 2.37 wegen  $E_1^0 = E_2^0$ ,  $U_1 = U_2 \equiv U$  und damit  $\Delta E = 0$  zu

$$\dot{z}(t) = -\sqrt{1 - z^2(t)} \sin[\phi(t)] \quad (2.42)$$

$$\dot{\phi}(t) = \Lambda z(t) + \frac{z(t)}{\sqrt{1 - z^2(t)}} \cos[\phi(t)] \quad (2.43)$$

Die Dynamik der Josephson Oszillationen wird nach zwei Merkmalen unterteilt. Es gibt die „zero-phase-mode“ und die „ $\pi$ -phase-mode“. Diese Bezeichnung resultiert aus dem zeitgemittelten Wert für die Phase  $\langle \phi(t) \rangle$  zwischen den Potentialtöpfen. Es stellt sich heraus, daß die Anfangsbedingungen  $\phi(t=0)$  und  $z(t=0)$  einen entscheidenden Einfluß auf die Tunneldynamik ausüben.



**Abbildung 2.6:** Die Besetzungszahldifferenz zwischen den beiden Potentialtöpfen ist als Funktion der dimensionslosen Zeit  $2Kt$  (in Einheiten von  $\hbar$ ) aufgetragen. Die Anfangsbedingung für die Phase ist  $\phi(t=0) = 0$  und der Parameter für die Nichtlinearität ist auf  $\Lambda = 10$  festgesetzt.  $z(0)$  nimmt die Werte von 0.1 bis 0.65 an. (a):  $z(0) = 0.1$ . Die Differenz der Anfangsbesetzung ist relativ klein und die Oszillation hat die Form einer Sinusfunktion. (b),(c):  $z(0) = 0.5, 0.59$ . Eine Vergrößerung von  $z(0)$  läßt die Oszillation anharmonisch und die Schwingungsperiode größer werden. Letztere divergiert bei Überschreitung eines bestimmten Wertes ((d),  $z(0) = 0.6$ ). (e)  $z(0) = 0.65$ . Übersteigt die anfängliche Besetzungszahldifferenz einen kritischen Wert  $z(0) \gtrsim z_c$ , dann tritt der Effekt des „macroscopic quantum self-trapping“ auf. Charakteristisch dafür ist eine nicht verschwindende zeitgemittelte Besetzungszahldifferenz  $\langle z \rangle \neq 0$ . Der zum Zeitpunkt  $t = 0$  stärker populierte Potentialtopf behält diese Eigenschaft im zeitlichen Mittel bei. Das Bild ist aus der Referenz von Raghavan [60] entnommen.

Die Bezeichnung **zero-phase-mode** beinhaltet, daß sowohl die Phasendifferenz als auch die Besetzungszahldifferenz im zeitlichen Mittel verschwinden:  $\langle \phi(t) \rangle = 0$  und  $\langle z(t) \rangle = 0$ . Betrachtet wird die Entwicklung von  $z$  in Abhängigkeit der Zeit für verschiedene Werte der Anfangsbesetzung (Abb. 2.6).  $z(0)$  nimmt die Werte 0.1, 0.5, 0.59, 0.6 und 0.65 an. Der Parameter  $\Lambda$ , der ein Maß für die Nichtlinearität des Systems ist, wird auf den Wert 10 festgesetzt. (a) Bei kleinen Amplituden ist die Oszillation sinusförmig. Die Vergrößerung von  $z(0)$  läßt die Oszillation anharmonisch werden. Das Auftreten dieser Anharmonizität ist von der Bewegung des mechanischen Pendels mit großen Amplituden bekannt ((b) und (c)). Die Schwingungsperiode nimmt mit weiter wachsender Ungleichheit der Anfangsbesetzung zu, bis sie schließlich bei der Überschreitung eines kritischen Wertes divergiert (gestrichelte Linie (d)).

Neben anharmonischen und langsamen Schwingungen offenbart sich der Effekt des „macroscopic quantum self-trapping“. Dieser tritt auf, wenn eine kritische anfängliche Anfangsbesetzung  $z_c$  überschritten wird. Charakteristisch für self-trapping ist eine nicht verschwindende zeitgemittelte Besetzungszahldifferenz  $\langle z \rangle \neq 0$  (Abb. 2.6(e)). Das heißt, daß im zeitlichen Mittel einer der beiden Potentialtöpfe stärker besetzt ist. Die Bedingung, die an das Auftreten von MQST geknüpft ist läßt sich mit Gleichung 2.40 unter der Berücksichtigung der Anfangsbedingungen ausdrücken:

$$H_0 = \frac{\Lambda z(0)^2}{2} - \sqrt{1 - z(0)^2} \cos[\phi(0)] > 1 \quad (2.44)$$

Eine andere Möglichkeit diesen Effekt zu beobachten besteht darin, die Anfangsbesetzung  $z(0)$  festzuhalten und  $\Lambda$  zu erhöhen, beispielsweise durch die Erzeugung größerer Kondensate oder der Veränderung der Fallengeometrie. Letzteres und die Überschneidung der Wellenfunktionen der BEC-Grundzustände der Potentialtöpfe haben Einfluß auf die Kopplungsstärke (siehe Gleichung 2.33). MQST kann bei der Überschreitung eines kritischen Werts  $\Lambda_c$  beobachtet werden. Für diesen gilt:

$$\Lambda_c = \frac{1 + \sqrt{1 - z(0)^2} \cos[\phi(0)]}{z(0)^2/2} \quad (2.45)$$

Beträgt die über die Zeit gemittelte Phase  $\langle \phi \rangle = \pi$ , treten prinzipiell die gleichen Oszillationen auf, jedoch verhalten sich die kritischen Parameter anders. Man spricht von der  **$\pi$ -phase-mode**, dessen experimenteller Nachweis für uns momentan noch nicht möglich ist. Es sei an dieser Stelle auf seine theoretische Beschreibung im Artikel [60] verwiesen.

### Vergleich mit SJJ

Im Vergleich mit den SJJ beschreibenden Gleichungen 2.24 und 2.27 fällt sofort auf, daß die SJJ im Gegensatz zur BJJ einen externen, treibenden Strom hat. Die über der SJJ abfallende Spannung ist proportional zur zeitlichen Änderung

der Phase. Der  $\sqrt{1 - z^2}$ -Faktor ist hier nicht vorhanden, da der externe Strom das Ungleichgewicht der Ladungen unterdrückt, welches andernfalls durch das Tunneln von Cooper-Paaren entstehen würde.

Für den Fall, daß der externe Strom verschwindet ( $J_{\text{ext}} = 0$ ), kann das System noch harmonische Strom/Spannungs-Oszillationen mit kleiner Amplitude ausführen. Die lineare Näherung von Gl. 2.27 liefert die Plasmafrequenz  $\omega_P = \sqrt{(2eJ_0)/(\hbar C)}$  des Systems. Diese ist von den Anfangsbedingungen  $\phi(0)$  und  $\dot{\phi}(0)$  unabhängig.

Das mechanische Analogon für die BJJ ist ebenfalls ein extern getriebenes Pendel. Dieses ist jedoch im Unterschied zur Pendel-Analogie der SJJ nicht starr. Seine Länge ändert sich proportional zu  $\sqrt{1 - z^2}$  [61].

Auf den ersten Blick können anhand der BJJ nicht alle bei der SJJ auftretenden Effekte beobachtet werden, da es sich bei Ersterer um ein System mit neutralen Atomen handelt. Die Möglichkeit mit Hilfe mehrerer Laserstrahlen eine Vielzahl von Fallengeometrien zu realisieren, sowie die bei Kondensaten in Erscheinung tretende nichtlineare Wechselwirkung, könnten die elektrische Neutralität wieder wettmachen. Beispielsweise ist bei einem asymmetrischen Doppeltopfpotential ein Unterschied  $\Delta E$  der Grundzustandsenergien vorhanden, was der angelegten Spannung im SJJ Fall entspricht. Die Differenz der nichtlinearen Energien ( $\sim UN_T z$ ) zwischen beiden Potentialtöpfen übernimmt die Rolle einer Kapazität. Im Gegensatz zur SJJ ist bei der BJJ die Besetzung  $N_{1,2}$  variabel. Nach einer anfänglichen ungleichen Besetzung der Potentialtöpfe, können die Laser, welche die Atomfalle erzeugen, so manipuliert werden, daß sich die Kopplungsstärke  $K$  verändert und Tunneln zwischen den Töpfen verhindert wird.

## 2.4 Numerik

Um die experimentellen Ergebnisse quantitativ mit den theoretischen Vorhersagen vergleichen zu können, sind verschiedene numerische Berechnungen und Simulationen durchgeführt worden. Die dazu benötigten Programme werden mit dem Softwarepaket „MatLab“ geschrieben und ausgeführt. Die zugrundeliegende Methode wird nur kurz zusammengefasst, da sie ebenfalls in vorhergehenden Arbeiten unserer Gruppe angewandt und beschrieben wurde [51, 50].

### Split-Step

Die Split-Step-Fourier-Methode (SSFM) ist ein gängiges Verfahren zur Integration einer beliebigen (nichtlinearen) Schrödinger-Gleichung [62]. Die infinitesimale Zeitentwicklung einer Wellenfunktion  $\psi(x, t)$  ist dabei durch den Zeitentwicklungsoperator  $\hat{U}(dt)$  bestimmt [63]:

$$\psi(x, t + dt) = \hat{U}(dt)\psi(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}dt}\psi(x, t) \quad (2.46)$$



mit dem Hamiltonoperator  $\hat{H}$  des Systems. Das Grundprinzip der SSFM besteht in der Aufspaltung des Zeitentwicklungsoperators in zwei Terme, die jeweils im Impuls- bzw. Ortsraum diagonale Gestalt haben und dort leicht ausgewertet werden können.

$$\psi(x, t + dt) = e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{K} + \hat{N})dt} \psi(x, t) \approx e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{K} dt} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{N} dt} \psi(x, t) \quad (2.47)$$

$\hat{K}$  bezeichnet den Teil der im Impulsraum diagonal ist und  $\hat{N}$  umfasst diejenigen Anteile des Hamiltonoperators, die im Ortsraum berechnet werden. Neben dem Nichtlinearitätsterm sind dies auch das periodische, sowie das harmonische Potential, aus denen das Doppeltopfpotential superponiert wird (siehe Kapitel 3). Da die Operatoren  $\hat{K}$  und  $\hat{N}$  nicht kommutieren, wird bei der letzten Aufteilung nach der Baker-Hausdorff-Formel [64] ein Fehler gemacht, der jedoch für hinreichend kleine Zeitschritte  $dt$  vernachlässigbar ist. Da  $\hat{N}$  im Ortsraum diagonal ist, ergibt sich für diesen ersten Integrationsschritt:

$$\psi(x, t + dt) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{N} dt} \psi(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} [V(x) + gN|\psi|^2] dt} \psi(x, t) \quad (2.48)$$

Hingegen ist der Dispersionsterm im Impulsraum diagonal ist. Er wird deshalb nach einer Fouriertransformation  $\psi(k, t) = \mathcal{F}[\psi(x, t)]$  in diesem ausgewertet.

$$\psi(k, t + dt) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{K} dt} \psi(k, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} dt} \psi(k, t) \quad (2.49)$$

Die Rücktransformation in den Ortsraum schließt die infinitesimale Zeitpropagation ab. Für die numerische Simulation muß nur noch die Größe des Zeitschritts  $dt$  und der Ortsauflösung  $dx$  geeignet gewählt werden.

### Grundzustand des Systems

Auch die Startwellenfunktion  $\psi(x, t = 0)$  des Ensembles, die dem Grundzustand im gewählten Potential entspricht, muß numerisch berechnet werden. Eine einfache Möglichkeit dazu basiert auf der Methode der Propagation in imaginärer Zeit. Durch eine Wick-Rotation

$$t \rightarrow \tau = -it \quad (2.50)$$

wird aus der GPE eine Diffusionsgleichung, die zu dem gewünschten Energieverlust, aber auch zu einem unerwünschten Teilchenzahlverlust führt. Man wählt nun eine Testfunktion  $\psi_{\text{test}}(x, t = 0)$ , die man z.B. durch die Abschnitt 2.1.2 beschriebenen analytischen Näherungsmethoden erhält, und propagiert diese durch die oben beschriebene Split-Step-Methode in imaginärer Zeit ( $dt \rightarrow i dt$ ). Den Teilchenzahlverlust gleicht man aus, indem man nach jedem Zeitschritt die Wellenfunktion neu normiert. Liegt die Startwellenfunktion genügend nahe beim Grundzustand, und wählt man  $i dt \sim i \cdot 0.8 \mu\text{s}$  genügend klein, so konvergiert das Verfahren gegen den gesuchten Grundzustand  $\psi(x, t = 0)$  [26, 65].

### Effektive eindimensionale Schrödinger Gleichung

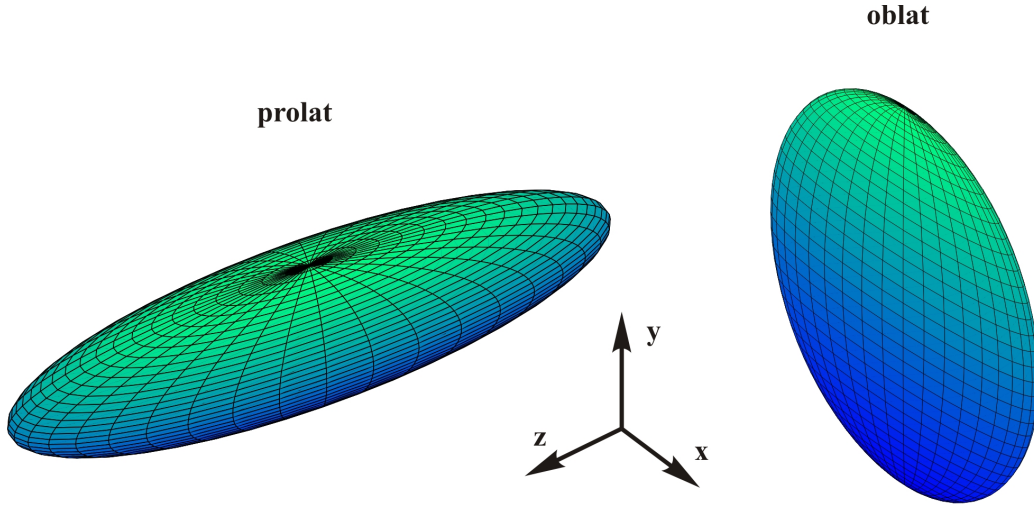
Obwohl wir nur an der Dynamik des BECs in einer Richtung (zwischen den Potentialtöpfen) interessiert sind, muß die transversale Dynamik des Wellenpakets auch berücksichtigt werden. Eine Dichteänderung in axialer Richtung beeinflusst auch die transversale Größe und wirkt somit auf die Wechselwirkungsenergie zurück. Die numerische Lösung der 3D GPE (Gl. 2.5) erfordert einen erheblichen Rechenaufwand. Man reduziert deshalb die 3D GPE auf eine eindimensionale Gleichung, die vergleichsweise schnell zu lösen ist, deren Anwendbarkeit aber anhand experimenteller Daten geprüft werden muß. Ein Vergleich mit der „exakten“ Lösung der 3D GPE zeigt, dass der Vorschlag für eine 1D Gleichung von Salasnich et al. [66] die bisher beste Übereinstimmung ergab:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_{ext}(x) + g_{1d} N \frac{|\Psi(x, t)|^2}{\sqrt{1 + 2aN|\Psi(x, t)|^2}} \right] \Psi(x, t) + \left[ \frac{\hbar\omega_{\perp}}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + 2aN|\Psi(x, t)|^2}} + \sqrt{1 + 2aN|\Psi(x, t)|^2} \right) \right] \Psi(x, t). \quad (2.51)$$

Mit der eindimensionalen Kopplungskonstante  $g_{1d} = 2\hbar a \omega_{\perp}$ . Dabei ist  $\omega_{\perp}$  das Mittel der transversalen Fallenfrequenzen. Gleichung 2.51 wird von uns für die numerische Simulation der Tunneldynamik verwendet. Eine genaue Erklärung der einzelnen Terme befindet sich unter anderem in [50, 66].

#### 2.4.1 Einfluß der Fallenparameter

Um optimale Bedingungen für die Beobachtung von Josephson Oszillationen zu herzustellen, ist es erforderlich neben den relevanten Parametern, wie Höhe und Breite der zu durchtunnelnden Barriere, sowie Atomzahl, auch die Geometrie des Doppeltopfpotentials und damit die Form des Kondensats zu berücksichtigen. Das Verhältnis  $\lambda$  der transversalen und longitudinalen Fallenfrequenzen stellt sich als kritischer Parameter heraus ( $\lambda \equiv \omega_r/\omega_z$ ) [67]. Die Amplitude der relativen Besetzungen der Potentialtöpfe  $z(t)$  unterscheidet sich in Abhängigkeit von  $\lambda$ . Es wird zwischen der „zigarrenförmigen“ prolaten Form ( $\lambda > 1$ ) und der „eierkuchenförmigen“ oblaten Form ( $\lambda < 1$ ) der Falle unterschieden (Abb. 2.7). Wie oben gezeigt, ist aufgrund der auftretenden nichtlinearen Wechselwirkung die maximale Amplitude der Oszillation  $z_c$  kleiner als eins. Bei einer anfänglichen Besetzungszahldifferenz, die größer oder gleich dem kritischen Wert ist ( $z(0) \gtrsim z_c$ ), tritt MQST auf. Es stellt sich heraus, daß die Amplitude der Josephson Oszillationen dann maximal wird, wenn die Fallengeometrie sehr oblat ist, das heißt  $\lambda \ll 1$ . Dadurch wird das Areal der schwachen Kopplung vergrößert. In [67] wird  $z_{\max}$  für verschiedene typische Fallen numerisch als Funktion der relevanten Parameter berechnet. Betrachtet wird ein BEC ( $^{23}\text{Na}$  oder  $^{87}\text{Rb}$ ) mit  $N_T = 10^4$  Atomen. Die Breite der

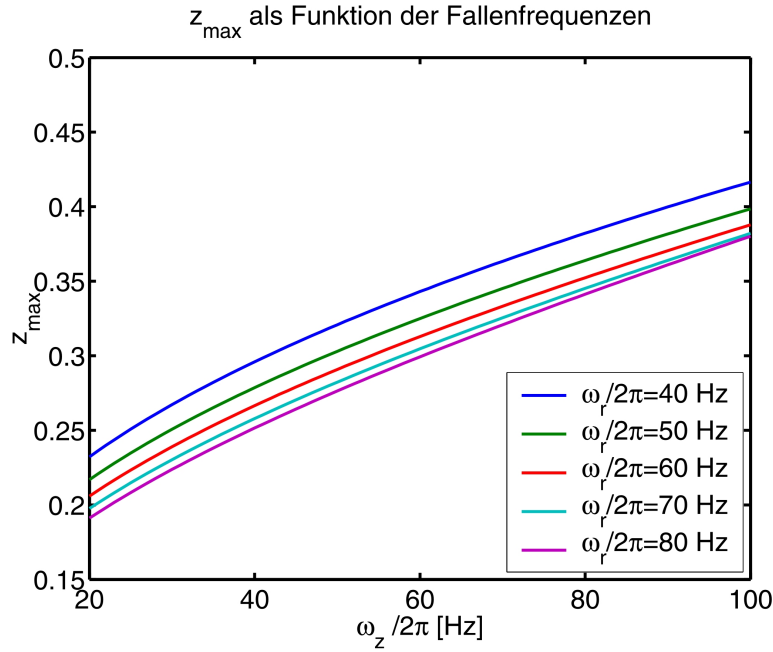


**Abbildung 2.7:** Illustration der Fallenformen. Das Verhältnis von transversaler und axialer Fallenfrequenz  $\lambda \equiv \omega_r/\omega_z$  gibt die Form der Falle vor. Bei  $\lambda > 1$  ( $\lambda < 1$ ) spricht man von prolater (oblater) Form.

Tunnelbarriere beträgt  $\sigma = 1 \mu\text{m}$  und das Verhältnis von Barrierenhöhe zu chemischem Potential wird auf 1.5 fixiert. Die Variation von  $0.002 < \lambda < 13$  hat einen sehr deutlichen Einfluß auf die maximale Amplitude, die zwischen 0.036 und 0.85 liegt. Desweiteren stellt sich heraus, daß ein analytischer Ausdruck für das Skalierungsverhalten von  $z_{\text{max}}$  angegeben werden kann:

$$z_{\text{max}} \sim \frac{\exp[-\sqrt{m\sigma^2(U_0 - \mu)/4\hbar^2}]}{(ma^2\lambda^4 N_T^2 \omega_z / \hbar)^{1/10}} \quad (2.52)$$

Bei Abnahme von  $m$ ,  $a$ ,  $\sigma$ ,  $N_T$  oder  $U_0$  nimmt die maximale Amplitude  $z_{\text{max}}$  also zu. Für festgehaltene longitudinale Fallenfrequenz  $\omega_z$  vergrößert sich  $z_{\text{max}}$  bei Abnahme von  $\lambda$ . Als atomare Spezies ist  $^{23}\text{Na}$  im Vergleich zu  $^{87}\text{Rb}$  besser geeignet, da seine Masse um den Faktor vier kleiner und die Streulänge nur etwa halb so groß ist. Einsetzen der bei unserem Experiment auftretenden Parameter liefert das in Abb. 2.8 gezeigte Skalierungsverhalten. Das chemische Potential wird mit der Thomas-Fermi-Näherung 2.7 berechnet. Da die Tunnelbarriere unseres Doppelpotentials durch ein sinusförmiges Gitter erzeugt wird, der Berechnung des Skalierungsverhaltens 2.52 jedoch eine Gaußfunktion als Barriere zugrunde liegt, wird die  $1/e^2$ -Breite zu  $\sigma = 1.2 \mu\text{m}$  abgeschätzt. Weitere Parameter sind die Atomzahl  $N_T = 10^3$  und die Barrierenhöhe  $U_0 = 0.11E_{\text{rec}}$ . Die Photonenrückstoßenergie berechnet sich aus  $E_{\text{rec}} = \hbar^2(\frac{2\pi}{\lambda_{\text{SW}}})^2/2m$ .  $\lambda_{\text{SW}} = 785 \text{ nm}$  ist die Wellenlänge der Laserstrahlen, welche die Stehwelle erzeugen, die zur Realisierung des Doppelpotentials benötigt wird. Es stellt sich heraus, daß bei festgehaltener Fallenfrequenz  $\omega_z$  eine Erniedrigung der radialen Fallenfrequenz  $\omega_r$  zu einer Erhöhung von  $z_{\text{max}}$



**Abbildung 2.8:** Gezeigt ist das Skalierungsverhalten der maximalen Amplitude  $z_{\max}$  von Josephson Oszillationen in Abhängigkeit von den Fallenfrequenzen. Das heißt für  $|z_{\max}| = 1$  befinden sich alle Atome in nur einem Potentialtopf. Die nach Gl. 2.52 zur Berechnung verwendeten Parameter entsprechen denen unseres Experiments (siehe Text). Dannach zeigt sich, daß bei einer festen Fallenfrequenz von  $\omega_z = 2\pi \cdot 75$  Hz eine Erniedrigung der radialen Fallenfrequenz um  $2\pi \cdot 30$  Hz zu einer Erhöhung von  $z_{\max}$  führt. Dies entspricht sehr gut dem Wert unserer Falle in axialer Richtung. Die Änderung von  $z_{\max}$  beträgt allerdings nur  $\simeq 2\%$  und wird experimentell mit unserer Genauigkeit nicht zu beobachten sein. Anders verhält es sich bei fixer radialer Frequenz  $\omega_r$ . Dann vergrößert sich die maximale Amplitude bei Zunahme der axialen Frequenz  $\omega_z$  um  $\simeq 25\%$ , was zu beobachten sein sollte.

führt. Bei unserem Experiment beträgt die axiale Fallenfrequenz  $\omega_z = 2\pi \cdot 75$  Hz. Die Erniedrigung von  $\omega_r = 2\pi \cdot 80$  Hz  $\rightarrow 2\pi \cdot 50$  Hz führt zu einer Änderung von  $z_{\max}$  von nur  $\simeq 2\%$ . Demnach wird der Einfluß des Parameters  $\lambda$  experimentell nur schwer zugänglich sein. Anders verhält es sich im umgekehrten Fall. Bei fixer radialer Frequenz  $\omega_r$  vergrößert sich die maximale Amplitude bei Zunahme der axialen Frequenz  $\omega_z$ :  $\omega_z = 2\pi \cdot 40$  Hz  $\rightarrow 2\pi \cdot 100$  Hz führt zu einer Änderung von  $z_{\max}$  von  $\simeq 25\%$ . Diese Variation von  $z_{\max}$  wird wesentlich einfacher zu beobachten sein.

# Kapitel 3

## Experimenteller Aufbau

### 3.1 Erzeugung von BECs

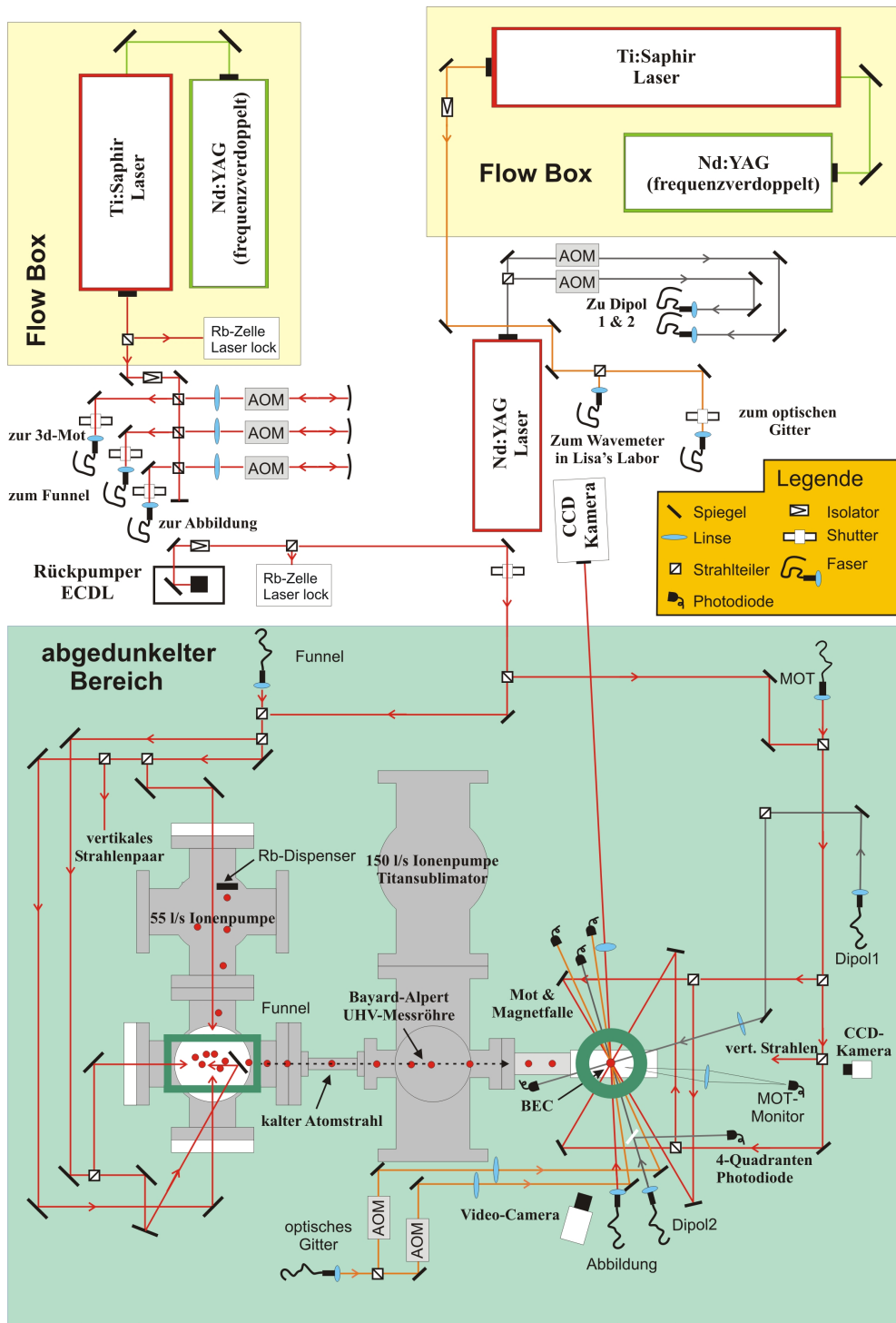
#### 3.1.1 Aufbau

Der experimentelle Aufbau der Apparatur zur Erzeugung eines Bose-Einstein-Kondensats ist bereits Bestandteil vorheriger Diplom- und Doktorarbeiten [51, 50]. Im Folgenden werde ich daher einen zusammenfassenden Überblick über die experimentelle Realisierung geben und den Schwerpunkt auf die Implementierung des Doppelmuldenpotentials legen.

#### Überblick über den Gesamtaufbau

Der Herstellungsprozeß eines Bose-Einstein Kondensats lässt sich wie folgt kurz zusammenfassen. Die Rubidium-Atome ( $^{87}\text{Rb}$ ) werden aus einer Quelle (Dispenser) bei einer Temperatur von  $T \simeq 700 \text{ K}$  freigesetzt. In einer  $2\text{D}^+$  magneto-optischen Falle [68], auch Funnel genannt, wird durch Laserkühlung ein Strahl kalter Atome (typischerweise bei  $T \simeq 1 \text{ K}$ ) erzeugt. Diese werden in die Ultrahochvakuum-Kammer geleitet, wo ein Druck von  $< 10^{-11} \text{ mbar}$  herrscht, und zur weiteren Kühlung in einer 3D-MOT eingefangen ( $T \simeq 150 \mu\text{K}$ ). Nach dem Transfer in eine magnetische TOP-Falle wird das Ensemble nach evaporativer Kühlung in eine dreidimensionale optische Dipolfalle umgeladen und dort zur Kondensation gebracht ( $T < 200 \text{ nK}$ ). Realisiert wird diese Falle durch zwei rotverstimmte und stark fokussierte Laserstrahlen, die nahezu orthogonal zueinander verlaufen und im Folgenden mit x-DT und y-DT bezeichnet werden (DT steht für „dipole-trap“).

Der Dipolfalle ist ein optisches periodisches Gitter (Stehwelle) überlagert. Durch die Superposition dieses Gitters mit dem x-DT wird das Doppelmuldenpotential erzeugt. Der Nachweis der Dichteverteilung erfolgt durch eine absorptive Abbildung. Ein resonanter Laserstrahl wird vom Kondensat teilweise absorbiert und mit Hilfe einer CCD-Kamera abgebildet. Aus diesen Bildern läßt sich Information über das atomare Ensemble gewinnen. Abbildung 3.1 gibt einen schematischen Überblick über den Gesamtaufbau wieder.



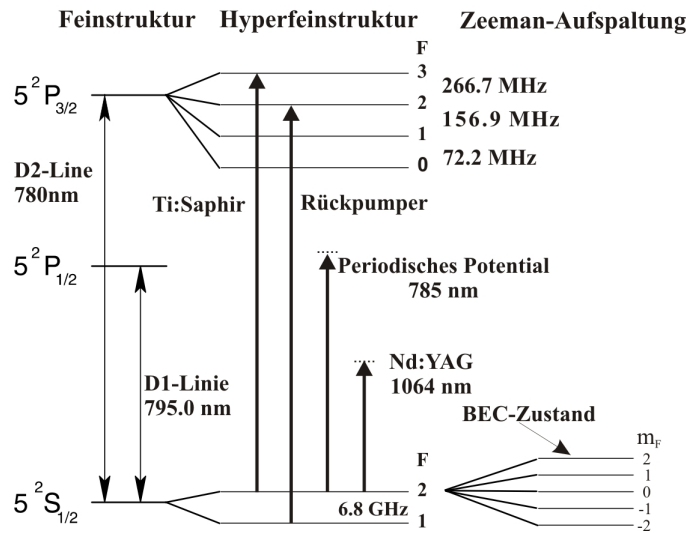
**Abbildung 3.1:** Schematischer Überblick über den Gesamtaufbau: Im oberen Teil befinden sich die Lasersysteme. Der grüne Bereich ist gegen Streulicht abgeschirmt und zeigt die Vakuumkammern mit Funnel und den verschiedenen Atomfallen. Die Atome gelangen durch den Funnel in die Glaszelle, wo MOT und Magnetfalle lokalisiert sind. Ihr sind die Dipolfallen und das periodische Potential überlagert, in dem das Experiment stattfindet. Zu Gunsten der besseren Übersichtlichkeit sind Details der Optik, Elektronik und Mechanik nicht eingezeichnet.

Für unser Experiment mit kalten Atomen verwenden wir eine Vakuumanlage, um die thermische Isolation von der Umgebung sicherzustellen, und ein Lasersystem, mit dessen Hilfe sich die Atome in gewünschter Weise manipulieren lassen. Die Laser erzeugen das Licht für die Laserkühlung und die Abbildung (linker Teil der Abb. 3.1: Nd:YAG, Titan:Saphir und External-Cavity-Diode-Laser(ECDL)), für die optischen Dipolfallen und die Stehwelle (rechter Teil: Nd:YAG, Nd:YAG, Titan:Saphir). Ihr Licht wird mit Hilfe von akusto-optischen Modulatoren (AOMs) zur erforderlichen Frequenz verschoben und auf die nötige Leistung eingestellt. Mechanische Shutter und ein für Licht undurchlässiger Vorhang sorgen für die ausreichende Abschirmung der Atome vor resonantem und nahresonantem Licht, das zu unkontrolliertem Aufheizen der Atome führen würde, was deren Verlust aus dem Falle bedeutete. Details der Optik, Elektronik und Mechanik sind zu besserer Übersichtlichkeit nicht eingezeichnet.

### 3.1.2 Lasersystem

Für die Durchführung unserer Experimente werden insgesamt vier Laser eingesetzt. In Abb. 3.2 sind der relevante Teil des Termschemas von  $^{87}\text{Rb}$  und die verwendeten Wellenlängen gezeigt.

- Ein Titan-Saphir Laser (Coherent, Monolithic-Block-Resonator 110), der mit einem frequenzverdoppelten Nd:YAG Laser (Coherent, Verdi V10) mit 10 W optischer Leistung gepumpt wird und typischerweise eine Ausgangsleistung von 1.4 W liefert. Er ist auf den ( $F = 2 \rightarrow F' = (3, 1)$ )-Crossover-Übergang der  $D_2$  Linie von  $^{87}\text{Rb}$  stabilisiert und liefert das Licht in der Nähe des ( $F = 2 \rightarrow F' = 3$ )-Übergangs der  $D_2$ -Linie bei 780.247 nm. Dieses wird für beide magneto-optischen Fallen, das optische Pumpen und die Abbildung benötigt.
- Ein gitterstabilisierter Diodenlaser in Littrow-Konfiguration (ECDL), der als Rückpumper für die magneto-optischen Fallen auf den ( $F = 1 \rightarrow F' = 2$ )-Übergang der  $D_2$ -Linie gelockt ist, dient dazu, den Teil der Atome, der aus dem angeregten Hyperfeinstrukturzustand  $F = 2$  in den  $F = 1$  Zustand des Grundzustands zerfällt, wieder in den Kühlkreislauf „zurück zu pumpen“.
- Ein diodengepumpter Nd:YAG Laser (Spectra-Physics, T40-X30-106QW), der bei einer Wellenlänge von 1064 nm eine optische Leistung von 3 W für die Laserstrahlen der optischen Dipolfallen zur Verfügung stellt. Das ist die größtmögliche Leistung, bei der dieser Laser noch Licht der Mode  $TEM_{00}$  erzeugt. Nur das Licht dieser Mode kann in die Glasfaser eingekoppelt werden.



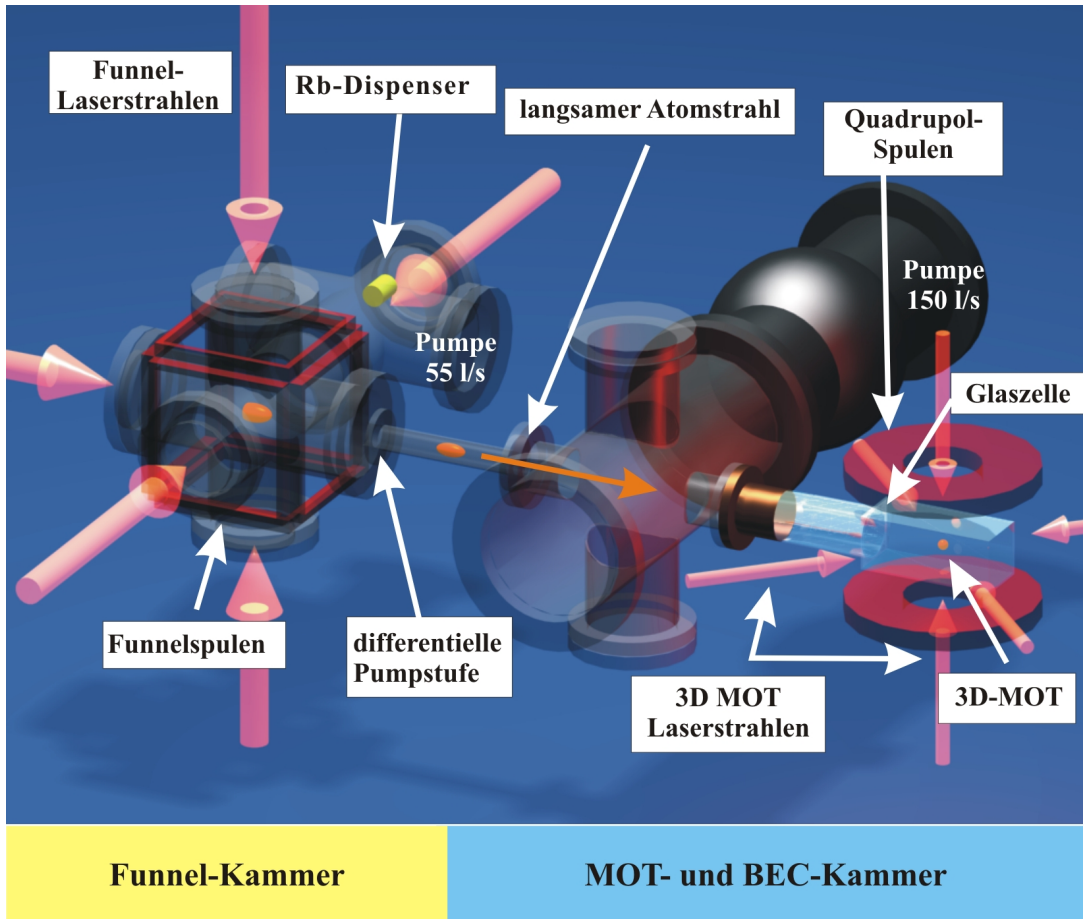
**Abbildung 3.2:** Ausschnitt aus dem Termschema von  $^{87}\text{Rb}$  und verwendete Laserwellenlängen.

- Für die Erzeugung des Doppelmuldenpotentials steht ein Ti:Sa Laser (Coherent, 899) bereit, der ebenfalls von einem Nd:YAG Laser (Coherent Verdi V10) gepumpt wird. Er ist gegenüber der  $D_2$ -Line um mehrere Nanometer rotverstimmt.

### Vakuum, Funnel und MOT

Um die Rb-Atome thermisch ausreichend von der Umgebung zu isolieren ist die Erzeugung eines ausreichend guten Vakuums unumgänglich. In der Funnelkammer herrscht ein Druck von  $10^{-9}$  mbar. Diese ist mit der MOT-Kammer, in welcher der Druck unter  $2 \cdot 10^{-11}$  mbar liegt, über eine differentielle Pumpstufe verbunden. Realisiert wird die Pumpstufe durch ein Loch von 1 mm Durchmesser, das sich im inneren der Funnelkammer eingebauten Spiegel befindet und die Aufrechterhaltung der Druckdifferenz gewährleistet. Die Motkammer besteht aus einer quaderförmigen Glaszelle, die den optischen Zugang aus fünf Raumrichtungen ermöglicht. Zwei unterschiedlich leistungsfähige Ionengetterpumpen (Funnel: 55 l/s, MOT: 150 l/s) der Firma Varian erzeugen die erforderlichen Vakua. Die schematische Übersicht dessen gibt Abbildung 3.3. Der Funnel ist im Wesentlichen eine zweidimensionale MOT, auf dessen Symmetrieachse ein weiteres gegenläufiges Laserstrahlpaar die Atome kühlt. Die Spulen sind so gewickelt, daß die sie durchfließenden Ströme bewirken, dass auf dieser Achse kein Feldgradient existiert. Durch eine leichte Asymmetrie der Strahlintensitäten wird ein langsamer Atomstrahl erzeugt und durch das kleine Loch im inneren Funnelspiegel zur 3D-MOT geleitet. Der schematische Aufbau der 3D-MOT ist aus Abb. 3.3 ersichtlich. Die Richtungen der die Magnetfelder erzeugenden Ströme und die Polarisation der MOT-Strahlen sind nicht





**Abbildung 3.3:** Überblick über die Vakuumanlage. Dispenser setzen atomares Rubidium in der Funnelkammer ( $\sim 10^{-9}$  mbar) frei. Mit ihr ist die Motkammer ( $\sim 10^{-11}$  mbar) über eine differentielle Pumpstufe verbunden. Das atomare Ensemble wird in der MOT und der Magnetfalle weiter gekühlt. Die Spulen der Magnetfalle (die TOP-Spulen sind nicht eingezeichnet) umschließen die Glazelle, die den Laserstrahlen für die Dipolfallen und das periodische Potential sehr guten optischen Zugang zu den Atomen ermöglicht.

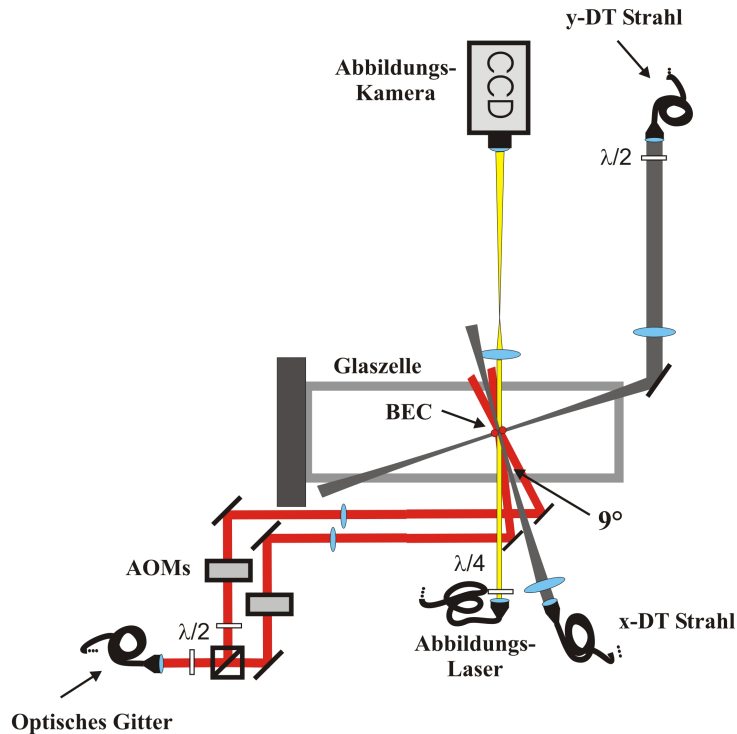
ingezeichnet.

### 3.1.3 Magnetfalle

Eine Aufgabe der Magnetfalle besteht darin die bereits vorgekühlte Atomwolke stark zu komprimieren um hohe Kollisionsraten zu erreichen. Das ist die Grundvoraussetzung für eine effiziente evaporative Kühlung. Aufgrund der Wechselwirkung  $V(r) = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = m_F g_F \mu_B |\mathbf{B}(\mathbf{r})|$  des magnetischen Moments  $\mu$  des Atoms mit einem äußeren magnetischen Quadrupolfeld  $\mathbf{B}$  können neutrale Atome gefangen werden. Jedoch erfahren nur solche Atome ein attraktives Potential, die sich in Zuständen mit  $m_F g_F > 0$ , den so genannten „weak-field-seeking-states“ befinden. Für „strong-field-seeking-states“ ( $m_F g_F < 0$ ) stellt ein Magnetfeldminimum ein repulsives Potential dar. In unserem Experiment werden Atome im ( $F = 2, m_f = 2$ ) weak-field seeking-Zustand gefangen. Weil die Atome im Fallenzentrum, wo das magnetische Feld verschwindet, so genannte Majorana-Spin-Flips ausführen [69], und sich danach in einem strong-field-seeking-state befinden, muß ein um das Fallenzentrum rotierendes homogenes Magnetfeld überlagert werden. Der Nullpunkt des resultierenden Feldes befindet sich dann nicht mehr im Zentrum der Falle, sondern bewegt sich auf einer Kreisbahn („circle-of-death“) darum herum. Wählt man die Rotationsfrequenz dieses Feldes sehr viel kleiner als die Lamorfrequenz, aber sehr viel größer als die resultierende Fallenfrequenz, so bleiben die Atome spinpolarisiert und sehen ein zeitgemitteltes harmonisches Potential. Dieser Fallentyp wird als TOP-Trap bezeichnet (TOP steht für time-orbiting-potential). Zur Verdampfungskühlung wird der Radius des „circle-of-death“ kontinuierlich verringert. Das bewirkt im Randbereich der Atomwolke Übergänge in ungefangene Zustände. Weil sich hier bevorzugt die heißesten Atome aufhalten, führt dies in Verbindung mit einer ausreichend schnellen Rethermalisierung zu einer Erniedrigung der Temperatur.

### 3.1.4 Aufbau um die Glaszelle

Nach der obigen Diskussion von MOT und Magnetfalle soll hier die Aufmerksamkeit auf die optischen Atomfallen und deren Aufbau gerichtet werden. Die Abbildung 3.4 zeigt die UHV-Glaszelle, in der die Experimente durchgeführt werden. Nach ausreichender Kühlung in der Magnetfalle werden die Atome zur Kondensation in die 3D-Dipolfalle umgeladen. Durch Absenken der Strahlleistungen in x-DT und y-DT wird weiter evaporativ gekühlt bis schließlich die für den Phasenübergang zum BEC erforderliche Temperatur erreicht ist. Das Kondensat wird in das Doppelmuldenpotential umgeladen. Dieses wird durch die Überlagerung von x-DT und optischem Gitter erzeugt. Dieses wiederum wird aus zwei sich kreuzenden Strahlen gebildet, die jeweils einen kleinen Winkel mit dem Strahl des x-DT einschließen. Der Winkel muß klein sein, damit die Periode der Stehwelle ( $d = 5 \mu\text{m}$ ) deutlich über der Wellenlänge der Gitter erzeugenden Laserstrahlen ( $\lambda_{\text{sw}} \simeq 785 \text{ nm}$ ) liegt. Er beträgt 9 Grad. Nach variablem Aufenthalt im Doppel-



**Abbildung 3.4:** Schematischer Aufbau der für die Messung des Josephson-Tunnels relevanten Komponenten. Magentfeldspulen, MOT-Strahlen und deren Optik sind nicht dargestellt. Kondensiert wird in der aus x-DT und y-DT erzeugten 3D-Dipolfalle. Das Doppelmuldenpotential wird durch die Überlagerung einer Stehwelle und dem x-DT Strahl erzeugt. Die Stehwelle hat eine Gitterkonstanten von  $d = 5 \mu\text{m}$  und wird durch zwei interferierende Laserstrahlen mit einer Wellenlänge von  $\lambda_{\text{sw}} = 785 \text{ nm}$  gebildet, die sich unter einem Winkel von 9 Grad kreuzen. Das BEC wird in das Doppelmuldenpotential umgeladen und nach variabler Verweildauer seine Dichteverteilung durch absorptive Abbildung nachgewiesen.

muldenpotential wird die atomare Dichteverteilung schließlich durch die Methode der Absorptionsabbildung nachgewiesen.

### 3.1.5 Steuerung

Der experimentelle Ablauf wird per Computer mit einem in „LabView“ geschriebenen Programm gesteuert. Zur Verfügung stehen jeweils 16 analoge und digitale Ausgabekanäle, sowie 8 analoge Eingabekanäle. Dadurch können relevante Parameter, deren Einstellungen für die Durchführung der Experimente von Bedeutung sind, exakt kontrolliert und zeitlich mit einer Auflösung von 1 ms gesteuert werden. Zwei weitere Computer stehen für die Aufnahme und unmittelbare Auswertung der Absorptionsbilder bereit. Das hat den Vorteil, daß während der Durchführung der Experimente bereits Ergebnisse zur sofortigen Korrektur und Optimierung ver-

wendet werden können.

## 3.2 Optische Dipolfallen und optische Gitter

Optische Dipolfallen und optische Gitter beruhen auf der Wechselwirkung eines Lichtfeldes mit einem durch dieses induzierten atomaren Dipolmoment. Im Vergleich mit beispielsweise Magnetfallen bieten Dipolfallen zwar geringere Fallentiefen im Mikrokkelvin-Bereich, vorgekühlte Atomwolken können jedoch mit hoher Effizienz von der Magnetfalle in die Dipolfalle transferiert werden. Ein wesentlicher Vorteil ist auch die Realisierung einer Vielzahl von verschiedenen Fallengeometrien, von makroskopischen Fallen bis zur regelmäßigen Anordnung von Mikrofallen. Prinzipiell ist das auch mit Magnetfallen möglich, diese sind jedoch komplizierter zu handhaben. Eine Möglichkeit ist beispielsweise der Bau von so genannten Atomchips. Dabei übernehmen elektrische Leiterbahnen die Funktion der Spulen; sie können bei der Produktion des Chips fast beliebig gestaltet werden und auf diese Weise sehr komplexe Magnetfelder an der Chipoberfläche erzeugen [70]. Die Schwierigkeit dabei ist, eine Störung der Atome durch die wenige Mikrometer entfernte Oberfläche des Chips zu vermeiden. Dipolfallen haben den Vorteil, daß sie völlig frei von Störungen solcher Art sind. Optische Gitter bieten zudem eine perfekte Periodizität ohne Störstellen. Wird eine große Verstimmung des Lichtfeldes gegenüber den atomaren Resonanzen gewählt, so ist die spontane Photonenstreurate sehr gering und das Fallenpotential nahezu dissipationsfrei. Aufgrund einer äußerst geringen spontanen Streurrate können in weitverstimmtten Dipolfallen und optischen Gittern Experimente mit kalten Grundzustandsatomen über Zeitskalen von Sekunden durchgeführt werden.

Im Folgenden werden die charakteristischen Eigenschaften weitverstimmtter Dipolfallen bzw. optischer Gitter beschrieben. Es werden, ausgehend vom einfachen Modell eines Atoms als klassischer Oszillator, allgemeine Ausdrücke für das Dipolpotential und die spontane Streurrate abgeleitet. Diese werden dann für den Fall des fokussierten, gaußförmigen Laserstrahls bzw. des optischen Gitters konkretisiert.

### 3.2.1 Atom-Licht-Wechselwirkung

Ich folge einer Herleitung die an der Referenz [71] orientiert ist. Wird ein Atom einem Lichtfeld ausgesetzt, so induziert das elektrische Feld  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}}E(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + k.k.$  ein atomares Dipolmoment  $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}}p(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + k.k.$ , das mit der Anregungsfrequenz  $\omega$  oszilliert. Dabei ist  $\hat{\mathbf{e}}$  der Einheitsvektor der Polarisation. Die Amplitude  $p$  des Dipolmoments ist über die komplexe Polarisierbarkeit  $\alpha$ , die von  $\omega$  abhängt, mit der Amplitude  $E$  des elektischen Feldes verknüpft.

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}) = \alpha(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (3.1)$$

Das Wechselwirkungspotential des induzierten Dipolmoments  $\mathbf{p}$  im elektrischen Feld  $\mathbf{E}$  lautet:

$$V_{dip} = -\frac{1}{2} \langle \mathbf{p} \mathbf{E} \rangle = -\frac{1}{\epsilon_0 c} \text{Re}(\alpha) \langle I \rangle. \quad (3.2)$$

Die eckigen Klammer deuten an, dass über schnell oszillierende Terme zeitlich gemittelt wird.  $\langle I \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c |E|^2$  ist die Intensität des Lichtfeldes und der Faktor  $\frac{1}{2}$  rührt daher, dass es sich nicht um ein permanentes, sondern ein induziertes Dipolmoment handelt. Die Leistung  $P_{abs}$ , die der Dipol aus dem Lichtfeld absorbiert, und in Form von Dipolstrahlung wieder emittiert, ist gegeben durch

$$P_{abs} = \langle \dot{\mathbf{p}} \mathbf{E} \rangle = 2\omega \text{Im}(pE^*) = \frac{1}{\epsilon_0 c} \text{Im}(\alpha) I. \quad (3.3)$$

Betrachtet man die absorbierte Leistung als Absorption und Emission von Photonen der Energie  $\hbar\omega$ , so kann die entsprechende Streurrate auch geschrieben werden als

$$\Gamma_{sc} = \frac{P_{abs}}{\hbar\omega} = \frac{1}{\hbar\epsilon_0 c} \text{Im}(\alpha) I(\mathbf{r}). \quad (3.4)$$

Damit kann sowohl das Potential, als auch die Streurrate auf die räumlich variierende Intensität  $I(\mathbf{r})$  und die komplexe Polarisierbarkeit  $\alpha(\omega)$  zurückgeführt werden. Erwähnenswert ist, daß diese Ausdrücke für beliebige polarisierbare Teilchen in einem oszillierenden elektrischen Feld Gültigkeit haben. Demzufolge auch für ein Atom in einem nahresonanten oder sehr stark verstimmtten Lichtfeld.

### 3.2.2 Atomare Polarisierbarkeit

Um die Polarisierbarkeit  $\alpha$  eines Zweiniveau-Atoms in einem Lichtfeld zu berechnen, geht man im Lorentz-Modell von einem klassischem Oszillator aus. Das Elektron (Masse  $m_e$ , Ladung  $e$ ) ist elastisch an den Kern des Atoms gebunden und besitzt die Eigenmode  $\omega_0$ , die der Resonanzfrequenz des Atoms entspricht. Es treten die bekannten Dämpfungseffekte nach Larmor auf, die aus der Leistungsabstrahlung einer beschleunigten Ladung resultieren [72]. Man kann die Polarisierbarkeit durch Integration der Bewegungsgleichung  $\ddot{x} + \Gamma_\omega \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{-eE(t)}{m_e}$  dieser angeregten Schwingung des Elektrons klassisch berechnen und erhält:

$$\alpha = \frac{e^2}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_\omega} \quad (3.5)$$

Die klassische Dämpfungsrate

$$\Gamma_\omega = \frac{e^2 \omega^2}{(6\pi\epsilon_0 m_e c^3)}, \quad (3.6)$$

die aus dem Energieverlust des Atoms, die aus der elektromagnetischen Abstrahlung resultiert, wird durch die Dämpfungsrate bei der atomaren Resonanz  $\Gamma \equiv \Gamma_{\omega_0} = (\omega_0/\omega)^2 \Gamma_\omega$  ersetzt:

$$\alpha = 6\pi\epsilon_0 c^3 \frac{\Gamma/\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i(\omega^3/\omega_0^2)\Gamma} \quad (3.7)$$

Bei der semiklassischen Herleitung wird das Atom als Zwei-Niveau Quantensystem betrachtet und koppelt an ein klassisches Strahlungsfeld. Das Ergebnis für die Polarisierbarkeit ist mit Gleichung 3.7 identisch, sofern Sättigungseffekte vernachlässigt werden können. Jedoch kann die Dämpfungsrate  $\Gamma$  (ihr quantenmechanisches Analogon ist die spontane Zerfallsrate des angeregten Zustands und entspricht seiner natürlichen Linienbreite) nicht mehr nach Larmor berechnet werden, sondern ist durch das Übergangsmatrixelement zwischen Grundzustand und angeregtem Zustand auszudrücken. Für die D-Linien sämtlicher Alkaliatome stimmt das klassische Ergebnis aus Gl. 3.7 mit der tatsächlichen Zerfallsrate bis auf wenige Prozent überein. Die Vernachlässigung von Sättigungseffekten ist im Normalfall bei Dipolfällen gerechtfertigt, weil das verwendete Laserfeld weit von der atomaren Resonanz der zu fangenden Spezies entfernt ist und dem entsprechend nur kleine Streuraten auftreten ( $\Gamma_{sc} \ll \Gamma$ ). Gleichung 3.7 erweist sich als exzellente Näherung für den quantenmechanischen Ausdruck.

### 3.2.3 Dipolpotential und Streurate

Unter den Voraussetzungen großer Verstimmung und vernachlässigbarer Sättigung kann mit obigem Ausdruck für die Polarisierbarkeit das Dipolpotential und die Streurate angegeben werden:

$$V_{dip} = -\frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \left( \frac{\Gamma}{\omega_0 - \omega} + \frac{\Gamma}{\omega_0 + \omega} \right) I(\mathbf{r}) \quad (3.8)$$

$$\Gamma_{sc} = \frac{3\pi c^2}{2\hbar\omega_0^3} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^3 \left( \frac{\Gamma}{\omega_0 - \omega} + \frac{\Gamma}{\omega_0 + \omega} \right) I(\mathbf{r}) \quad (3.9)$$

Wird die „rotating-wave-approximation“ („Drehwellennäherung“) verwendet, so wird der  $\frac{1}{\omega+\omega_0}$ -Term vernachlässigt. Bei der RWA werden Energiesatz verletzende Prozesse, die auf extrem kleinen Zeitskalen auftreten, nicht berücksichtigt. Dazu zählen Prozesse wie Emission eines Photons bei Anregung eines Atoms und Absorption eines Photons bei Zerfall eines Atoms in den Grundzustand. Damit vereinfachen sich die Gln. 3.8 und 3.9 zu

$$V_{dip} = \frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \frac{\Gamma}{\Delta} I(\mathbf{r}) \quad (3.10)$$

$$\Gamma_{sc} = \frac{3\pi c^2}{2\hbar\omega_0^3} \left( \frac{\Gamma}{\Delta} \right)^2 I(\mathbf{r}) \quad (3.11)$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich sofort zwei charakteristische Eigenschaften von Dipolfällen ablesen. Bei roter Verstimmung ( $\Delta < 0$ ) ist das Dipolpotential negativ, und das Atom erfährt eine attraktive Kraft in Richtung des Intensitätsmaximums des Laserfelds. Im anderen Fall, bei blauer Verstimmung ( $\Delta > 0$ ), ist die Wechselwirkung repulsiv und ein lokales Potentialminimum befindet sich am Ort des Intensitätsminimums des Lichtfelds. Das globale Potentialminimum befindet sich im

Fall der blauen Verstimmung im Unendlichen. Außerdem ist erwähnenswert, dass das Dipolpotential mit  $I/\Delta$  skaliert, während die Streurrate proportional zu  $I/\Delta^2$  ist. Um niedrige Streuraten bei ausreichenden Fallentiefen zu erreichen, werden Dipolfallen daher typischerweise bei hohen Intensitäten und großer Verstimmung betrieben.

### 3.2.4 x-DT und y-DT

Die Strahlen für x-DT und y-DT werden durch je einen rot verstimmtten und stark fokussierten Laserstrahl realisiert. Dazu wird der diodengepumpte Nd:YAG Laser bei einer maximalen Leistung von 3 W und der Wellenlänge  $\lambda = 1064 \text{ nm}$  verwendet. Der Laser wird in zwei Strahlen aufgeteilt, die jeweils einen AOM durchlaufen. Die so gebeugten Strahlen werden via Glasfasern zur Glaszelle geführt. Neben der Frequenzverschiebung dient der AOM als schneller Schalter und zur Regelung der Leistung in beiden Dipolfallen. Die AOMs werden nicht mit der gleichen Frequenz betrieben, damit die in der Glaszelle interferierenden Strahlen das atomare Ensemble nicht aufheizen können. Der Frequenzunterschied beträgt 1 MHz. Wir haben den Treiber für einen der AOMs durch Einbau eines anderen Quarzes modifiziert. Beide Strahlen sind auf eine Strahltaile von  $w_0 = (60 \pm 5) \mu\text{m}$  fokussiert und kreuzen sich wegen des „gravitational sag“ unterhalb des Zentrums der Magnetfalle. Die Atome erfahren aufgrund der Gravitation eine Kraft in  $z$ -Richtung, so daß sie sich unterhalb des Zentrums der Magnetfalle befinden. Für die Größe des „gravitational sag“ einer harmonischen Falle gilt:  $\Delta = g/\omega_z^2$ . Bei einer Fallenfrequenz in  $z$ -Richtung von ungefähr  $w_z = 2\pi \cdot 280 \text{ Hz}$  beträgt er  $\simeq 3 \mu\text{m}$ . Die genaue Position der Dipolfalle wird dahingehend optimiert, daß ein effizienter Transfer in diese gewährleistet ist. Die Intensitätsverteilung eines fokussierten Laserstrahls mit Gaußschem Profil, der mit der Leistung  $P$  in  $x$ -Richtung propagiert lautet:

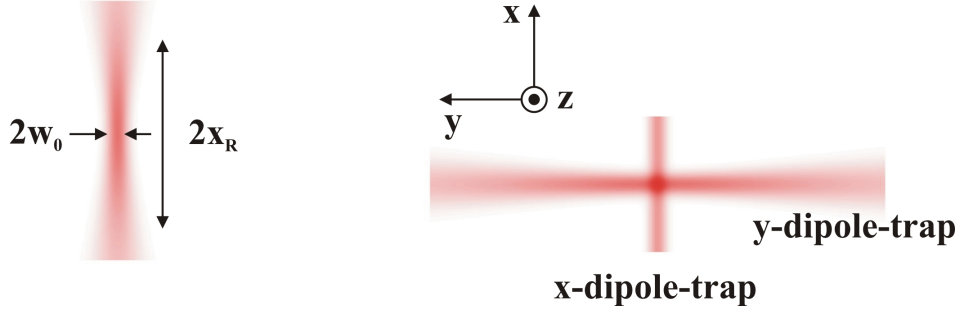
$$I(r, z) = \frac{2P}{\pi w^2(x)} \exp\left(-2\frac{r^2}{w^2(x)}\right) \quad (3.12)$$

$r = \sqrt{y^2 + z^2}$  ist die radiale Koordinate und  $w(x)$  ist der  $1/e^2$  Radius und von der axialen Koordinate  $x$  abhängig.

$$w(x) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{x_R}\right)^2} \quad (3.13)$$

Dabei ist  $w_0$  die Strahltaile und  $x_R = \pi w_0^2/\lambda$  die Rayleigh-Länge, die deren Änderung entlang der Strahlachse berücksichtigt. Aus der Intensitätsverteilung und unter Verwendung von Gl. 3.10 erhält man den Zusammenhang  $V(r, x) \propto I(r, x)$ , wobei:

$$V(r, x) = \frac{V_0}{1 + \left(\frac{x}{x_R}\right)^2} \exp\left[-2\frac{r^2}{w_0^2 \left(1 + \left(\frac{x}{x_R}\right)^2\right)}\right] \quad (3.14)$$



**Abbildung 3.5:** Links: Durch einen Gaußschen Laserstrahl realisierte Dipolfalle. Strahltaile  $w_0$  und Rayleigh-Länge  $x_R$  sind kenntlich gemacht. Rechts: Die Strahlen von x-DT und y-DT erzeugen die 3D-Dipolfalle. Die Gravitation wirkt in  $z$ -Richtung.

Die Falltiefe ist gegeben durch  $V_0 = |V(r = 0, x = 0)|$ . Der „gravitational sag“ ist hier nicht berücksichtigt und bei hohen Strahlleistungen vernachlässigbar.

$$V_0 = \frac{3c^2}{\omega_0^3 w_0^2} \frac{\Gamma P}{\Delta} \quad (3.15)$$

Die Rayleigh-Länge  $x_R$  (bei uns  $(1.1 \pm 0.2)$  cm) ist um den Faktor  $\pi w_0 / \lambda$  größer als die Strahltaile  $w_0$ . Deshalb ist das Potential in radialer Richtung sehr viel steiler als in axialer Richtung. Entwickelt man das Potential um den Fokus ( $r = 0, x = 0$ ) dann erhält man ein zylindersymmetrisches harmonisches Potential

$$V(r, x) \simeq -V_0 \left[ 1 - 2 \left( \frac{r}{w_0} \right)^2 - \left( \frac{x}{x_R} \right)^2 \right] \quad (3.16)$$

und daraus die Fallenfrequenzen in radialer und axialer Richtung:

$$\omega_r = \sqrt{\frac{4V_0}{mw_0^2}}, \quad \omega_z = \sqrt{\frac{2V_0}{mx_R^2}} \quad (3.17)$$

Unsere typischen experimentellen Parameter sind:  $w_0 = 60 \mu\text{m}$  für den y-DT Strahl. Der Strahl des x-DT hat nach passieren einer Zylinderlinse eine Strahltaile von  $60 \mu\text{m}$  in  $y$ - und  $120 \mu\text{m}$  in  $z$ -Richtung. Beide Dipolfallen werden bei einer Wellenlänge von  $\lambda_{\text{DT}} = 1064 \text{ nm}$  betrieben. Die Intensität der Laserstrahlen kann so eingestellt werden, dass radiale Fallenfrequenzen von  $2\pi \cdot 60 \text{ Hz}$  bis  $2\pi \cdot 150 \text{ Hz}$  problemlos realisierbar sind.

Die 3D-Dipolfalle wird durch die Strahlen von x- und y-DT erzeugt. Diese kreuzen sich unter einem Winkel von 90 Grad. Ihr Potential lautet in harmonischer Näherung:

$$V_{3\text{D}}(x, y, z) \simeq -V_0 \left( 1 - \frac{2x^2 + y^2 + z^2}{w_0^2} \right) \quad (3.18)$$



Die entsprechenden Fallenfrequenzen lassen sich ableiten zu:

$$\omega_x = \sqrt{\frac{4V_0}{mw_0^2}}, \quad \omega_{y,z} = \sqrt{\frac{2V_0}{mw_0^2}} \quad (3.19)$$

Die Photonenstreurate im Intensitätsmaximum ist durch Gl. 3.11 gegeben. Für einen Gaußschen Laserstrahl gilt demnach:

$$\Gamma_{sc} = \frac{3c^2 P}{\hbar \omega_0^3 w_0^2} \left( \frac{\Gamma}{\Delta} \right)^2 \quad (3.20)$$

Typischerweise nimmt  $\Gamma_{sc}^{-1}$  Werte von  $\simeq 8$  s Sekunden an. Damit kann die Streuung von Photonen auf der Zeitskala der Dauer unserer Experimente vernachlässigt werden.

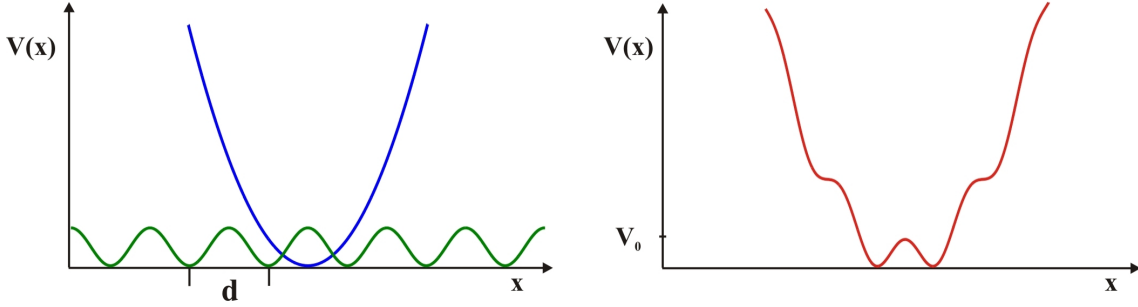
Weil  $^{87}\text{Rb}$  kein einfaches Zweiniveau-Atom ist, muß die Substruktur bei der Herleitung des Dipolpotentials berücksichtigt werden. Es zeigt sich aber, daß die Ergebnisse des vorigen Abschnitts für das vorliegende Experiment auch weiter gültig bleiben. Unter Berücksichtigung der  $D_1$ -Linie gilt anstelle von Gl. 3.10 folgender Ausdruck für die Fallentiefe  $V_0$ :

$$V_0 = \frac{3c^2 \Gamma}{\omega_0^3} \frac{P}{w_0^2} \frac{1}{3} \left( \frac{2}{\Delta_1} + \frac{1}{\Delta_2} \right) \quad (3.21)$$

$\Delta_i = \omega - \omega_i$  ist die Verstimmung des Lasers relativ zu den  $D_i$ -Linien. Das Potential setzt sich aus den zur jeweiligen  $D_i$ -Linie gehörigen Einzelpotentialen zusammen, und der Vorfaktor  $\frac{1}{3}$  rührt von den Clebsch-Gordan-Koeffizienten der beteiligten Hyperfein-Übergänge her. Ausdruck 3.10 ist für die meisten Fälle ein ausreichend gute Näherung, da der Fehler im Vergleich zu 3.21 lediglich 7% beträgt.

### 3.2.5 Optisches Gitter und Doppelmuldenpotential

Zur Erzeugung des Doppelmuldenpotentials kann sehr gut die Variabilität von Dipolfallen ausgenutzt werden. Es werden insgesamt drei Laserstrahlen verwendet. Zwei Strahlen kreuzen sich unter einem genau fixierten Winkel von 9 Grad und formen ein periodisches Potential dem eine einzelne Dipolfalle (x-DT) überlagert wird. Das periodische Potential wird mit Hilfe des Ti:Sa Lasers (899) erzeugt, der bei einer Wellenlänge von  $\lambda_{sw} = 785$  nm und einer Leistung von 1 W betrieben wird. Weil  $\lambda_{sw} \ll \lambda_{DT}$  gilt, interferiert der Strahl des x-DT nicht mit der Stehwelle. Die Stabilität der Lasermode des Ti:Sa wird mit einem Fabry-Perot Interferometer überwacht. Der Strahl wird nachdem er eine Glasfaser passiert hat aufgeteilt. Die zwei Teilstrahlen durchlaufen jeweils einen AOM. Unter einem kleinen Winkel  $\alpha = 9^\circ$  (relativ zur Richtung des x-DT Strahls) werden die Strahlen schließlich auf den Ort der Dipolfalle fokussiert und dort zur Interferenz gebracht. Kreuzen sich zwei linear polarisierte Laserstrahlen (lin||lin-Konfiguration) mit der Wellenlänge



**Abbildung 3.6:** Erzeugung und Darstellung des Doppeltopfpotentials. Links: Das Potential des optischen Gitters (Gitterkonstante  $d = 5 \mu\text{m}$ ) und der x-DT Falle (in harmonischer Näherung) sind einzeln dargestellt. Rechts: Das Resultat der Superposition hat die Form einer modulierten Parabel mit dem gewünschten Doppeltopfpotential im Minimum. Die Separation der Töpfe entspricht nicht der Periodizität des Gitters. Der Haltestrahl verursacht einen zusätzlichen Einschluß in  $x$ -Richtung, so daß die effektive Separation der Minima  $4.5 \mu\text{m}$  beträgt.

$\lambda_{\text{sw}}$  unter dem Winkel  $\alpha$ , so entsteht durch Interferenz ein Potential, das in seiner Intensität räumlich moduliert ist:

$$V(x) = V_{\text{max}} \cos^2\left(\frac{\pi x}{d}\right) \quad \text{mit der Periode} \quad d = \frac{\lambda_{\text{sw}}}{2 \sin(\frac{\alpha}{2})} \quad (3.22)$$

$$V_{\text{max}} = \frac{3c^2 \sqrt{P_1 P_2} \Gamma}{\omega_0^3 w_1 w_2 \Delta} \quad (3.23)$$

$P_{1,2}$  und  $w_{1,2}$  bezeichnen jeweils die Strahlleistung und -taille. Dadurch ist ein eindimensionales Gitter mit der Gitterkonstanten  $d$  realisiert und Atome können bei roter Verstimmung an Orten der Intensitätsmaxima gefangen werden. Da wir nur den symmetrischen Fall behandeln reduziert sich in Gl. 3.23 die Zahl der Variablen. Typische Werte für das Experiment liegen bei jeweils  $P_{\text{sw}} = P_{1,2} = 2 \text{ mW}$ ,  $w_{\text{sw}} = w_{1,2} = 300, \mu\text{m}$ . und  $d = 5 \mu\text{m}$ .

Mit Hilfe eines dritten Laserstrahls, der orthogonal zur Ausrichtung des eindimensionalen Gitters verläuft kann in guter Näherung ein Doppeltopfpotential konstruiert werden. Dazu dient in unserem Fall der schon in das System integrierte x-DT-Strahl des Nd:YAG-Lasers. Das resultierende Potential ist demnach eine Superposition des periodischen Gitters und des gaußförmigen Potentials der Dipolfalle. Unter der Annahme, dass die Strahltaille  $w(x)$  ortsunabhängig ist, was unter den gegebenen Bedingungen gerechtfertigt ist, ergibt die Kombination der Gln. 3.14 und 3.22 das Doppeltopfpotential

$$V_{\text{dw}} = -V_0 \exp\left[-2\frac{(r^2)}{w_0^2}\right] + V_{\text{max}} \cos^2\left(\frac{\pi x}{d}\right). \quad (3.24)$$

Das Doppeltopfpotential ist dann durch  $V_{\max}$  und den Abstand der beiden Minima charakterisiert. Dieser Abstand entspricht nicht mehr der Gitterkonstanten  $d$  da durch den Einfluß der zusätzlichen Dipolfalle ein stärkerer Einschluß in  $x$ -Richtung hervorgerufen wird.

### 3.2.6 Kontrolle von Intensität und Phase

Zur Präparation der Atome im Doppelmuldenpotential ist eine genaue Kontrolle der Phase und Amplitude des Gitters erforderlich. Die AOMs der Gitterstrahlen werden mit einer RF-Elektronik angesteuert. Ein Voltage Controlled Oscillator (VCO) erzeugt ein sinusförmiges Signal mit der Frequenz 100 MHz, das in zwei Kanäle für die beiden AOMs aufgespaltet wird. Dieses Signal wird jeweils mit dem Ausgangskanal des Arbitrary Waveform Generator (Tektronix AWG 420), der eine Grundfrequenz um 10 MHz erzeugt, gemischt. Die 110 MHz-Komponente des Mischungssignals wird extrahiert und verstärkt. Die resultierenden Signale treiben die AOMs. Der AWG kann mit nahezu beliebigen Ausgangssignalen programmiert werden, die mit einer frei wählbaren Samplingfrequenz ( $< 200$  MHz) abgespielt werden. Dies ermöglicht eine kontinuierliche Phasenverstimmung der Gitter-Laserstrahlen gegeneinander. Dadurch ist man in der Lage die Intensitätsmaxima des Gitters und somit die Barriere des Doppelmuldenpotentials räumlich zu verschieben.

Die Intensitäten von sämtlichen Dipolfallen erzeugenden Strahlen erweisen sich als äußerst kritische experimentelle Parameter. Kleinste Fluktuationen müssen weitestgehend vermieden werden, damit kein unerwünschtes Aufheizen der Atome oder unkontrollierte Gitterbewegungen auftreten. Folglich werden die Strahlintensitäten über jeweils einen Regelkreis aktiv stabilisiert. Dieser besteht aus einer Monitor-Photodiode, einem AOM und einem Proportional-Integral-Schaltkreis. Die Laserstrahlen werden mit Hilfe des AOM so gesteuert, dass das Spannungssignal der Monitor-Photodiode mit einem durch den Computer vorgegebenen Wert übereinstimmt.

## 3.3 Abbildungssystem

Die optische Abbildung der Atomwolken ist bei Experimenten mit kalten Atomen von elementarer Bedeutung. Aus den mit einer CCD-Kamera aufgenommenen Bildern werden Informationen über die atomaren Ensembles gewonnen. Wir verwenden die schon weiter oben erwähnte Absorptionsabbildung, die auch für relativ kleine Atomzahlen bis 500 gut geeignet ist.

Ein in  $y$ -Richtung propagierender kollimierter Laserstrahl beleuchtet die Atome mit resonantem Licht ( $F = 2 \rightarrow F' = 3$ -Übergang der  $D_2$ -Linie). Die transmittierte Intensitätsverteilung wird durch eine Linse auf eine CCD-Kamera (Theta-System SiS s285M) abgebildet. Die Linse (Mikroskopobjektiv Zeiss Plan-Apochromat, Brennweite 10 cm) vergrößert das Bild der atomaren Wolke um den Faktor

$M = 9.5$ . Die einzelnen Pixel auf dem CCD-Chip der Kamera haben eine Abmessung von  $6.45 \mu\text{m} \times 6.45 \mu\text{m}$ . Die Quanteneffizienz beträgt  $\simeq 30\%$ . Ein Pixel sieht demnach eine Fläche der Größe  $(6.45 \mu\text{m} \times 6.45 \mu\text{m})/M^2 \simeq 0.46 \mu\text{m}^2$ . Das ist im Vergleich mit der davor verwendeten Kamera der Firma Princeton-Instruments eine um den Faktor  $\sim 1/6$  kleinere Fläche. Die optische Auflösung ist jetzt wesentlich höher und jetzt durch die Linse auf  $3 \mu\text{m}$  begrenzt. Das Prinzip der Absorptionsabbildung beruht darauf, dass die Intensität  $I$  eines Laserstrahls beim Durchgang durch eine Atomwolke der Dichteverteilung  $\rho(\mathbf{r})$  abgeschwächt wird. In welchem Maß dies geschieht ist vom Streuquerschnitt und der Säulendichte der atomaren Wolke abhängig. Die gemessene transmittierte Intensitätsverteilung läßt Rückschlüsse über Dichteverteilung und Position der Atome zu. Intensität und Vergrößerungsfaktor  $M$  der Abbildungsoptik werden geeicht. Zur Intensitätseichung wird mit der Kamera ein Bild aufgenommen und die dazugehörige Leistung im Abbildungsstrahl mit Hilfe eines Powermeters gemessen. Für die Bestimmung von  $M$  wird das BEC der Erdbeschleunigung ausgesetzt und nach variabler Fallzeit abgebildet. Mit Hilfe eines parabolischen Fits an seine gemessene Fallhöhe ( $h = \frac{1}{2}gt^2$ ) kann die Vergrößerung bestimmt werden.

# Kapitel 4

## Experimentelle Ergebnisse

### 4.1 Charakterisierung des Systems

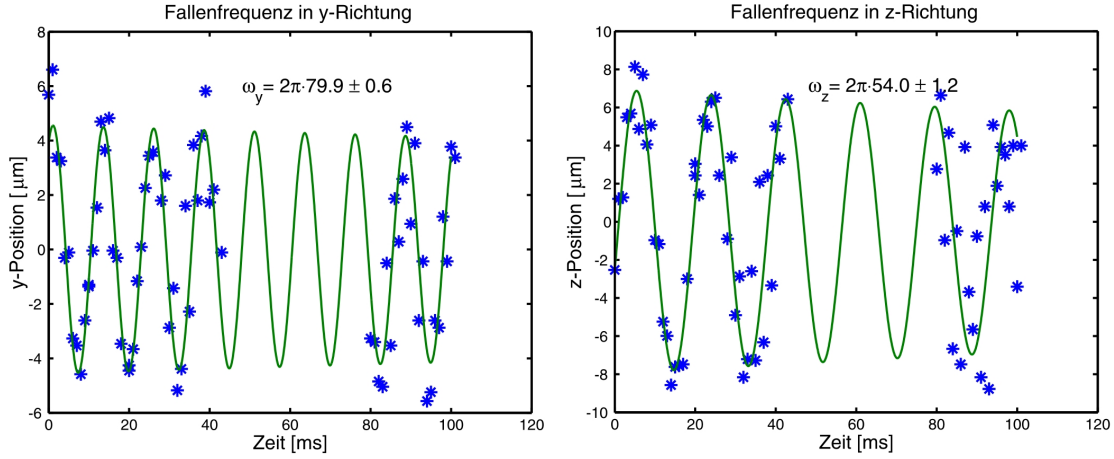
#### 4.1.1 Eichung der optischen Potentiale

Für die Durchführung des Experiments sind die Kenntnisse der Fallenfrequenzen der Dipolfallen in Abhängigkeit der Strahlleistungen von großer Bedeutung. Diese werden mit Hilfe mehrerer Methoden gemessen, denen gemein ist, daß ein BEC aus seiner Ruhelage ausgelenkt und die anschließende Schwingung des Massenschwerpunktes über einen ausreichend langen Zeitraum beobachtet wird.

##### (a) Dipoloszillationen

Für die Eichung der 3D-Dipolfalle wird in dieser ein BEC zu Dipolschwingungen angeregt indem man das Potentialminimum verschiebt. Der y-DT wird für die Dauer von 2 ms ausgeschaltet und im gleichen Zeitraum die Position des x-DT mit Hilfe des Piezo-Auskopplers verschoben. Anschließend stellt man die Intensität des y-DT wieder auf den ursprünglichen Wert ein. Die Ruhelage des BECs hat sich geändert und es führt die zu beobachtende Schwingung aus. Der Sprung mit dem x-DT muß so gewählt werden, daß die Amplitude der Schwingung in der Größenordnung von einigen  $\mu\text{m}$  liegt, da die harmonische Näherung nur im Fallenzentrum bei kleinen Auslenkungen gilt.

Jede Dipolfalle wird durch eine longitudinale und zwei transversale Fallenfrequenzen charakterisiert. Die longitudinale Richtung ist sowohl für den x-DT als auch für den y-DT nicht von Bedeutung, da diese nur einen Einschluß der Atome mit Frequenzen von unter 1 Hz verursacht und somit vernachlässigbar ist. Direkt gemessen werden kann bei unserer Geometrie nur die Auslenkung in  $y$ - und  $z$ -Richtung. Aus der  $y$ -Richtung erhält man unmittelbar eine der transversalen Frequenzen der Falle, die der x-DT Strahls erzeugt. Die Schwingung in  $z$ -Richtung gibt Aufschluß über die Überlagerung je einer transversalen Frequenz der aus x-DT- und y-DT-Strahl kombinierten Dipolfalle. Um die Fallenfrequenz in der nicht sichtbaren  $x$ -Richtung zu ermitteln, muß der Einfluß des x-DT Strahls so klein



**Abbildung 4.1:** Gemessene Fallenfrequenzen der 3D-Dipolfalle in  $y$ - und  $z$ -Richtung. Die Frequenz in der dritten Richtung wird auf Grundlage einer weiteren Messung entsprechend skaliert. Dazu wird der  $y$ -DT Strahl mit maximaler und der  $x$ -DT Strahl bei sehr niedriger Leistung betrieben.

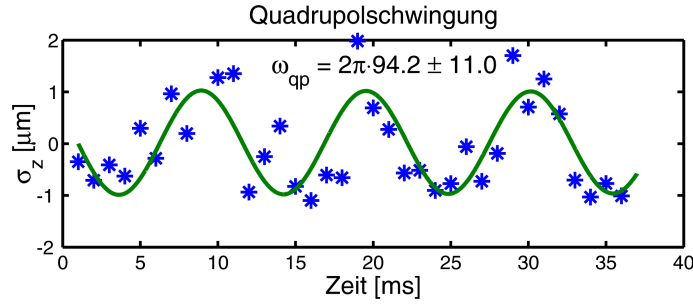
wie möglich sein. Das heißt, dass seine Leistung ausreicht, um das BEC im  $y$ -DT zu halten, während dieser mit größt möglicher Leistung betrieben wird. Die dann aus der zu beobachtenden Auslenkung in  $z$ -Richtung ermittelte Frequenz ist näherungsweise mit der in  $x$ -Richtung identisch und kann entsprechend skaliert werden. Typische Werte für unser Experiment liegen bei

$$\omega_x = 2\pi \cdot (59 \pm 1) \text{ Hz}, \quad \omega_y = 2\pi \cdot (79.9 \pm 0.6) \text{ Hz}, \quad \omega_z = 2\pi \cdot (54 \pm 1) \text{ Hz} \quad (4.1)$$

Die Datenpunkte werden mit einer exponentiell abfallenden Sinuskurve genähert. Der dominante Dämpfungsmechanismus entsteht durch die Wechselwirkung des Kondensats mit der thermischen Wolke.

Neben der Dipolschwingung wird auch noch eine Quadrupolschwingung beobachtet, bei der die Form des Kondensats oszilliert. Es handelt sich um die zylindersymmetrische  $m = 0$  Quadrupolmode. Bei dieser Mode oszillieren axiale und radiale Ausdehnung des Kondensats um  $\Delta\Phi = \pi$  phasenverschoben. Die Frequenz dieser Mode liegt bei  $\omega_{\text{qp}} = 2\pi \cdot (94 \pm 11) \text{ Hz}$ . Für eine thermische Wolke erwartet man ein Verhältnis von  $\frac{\omega_{\text{qp}}}{\omega_z} = 2$ . Die in Abb. 4.2 gezeigte Messung wurde mit einem BEC mit einer mittleren Atomzahl von  $N = 1.3 \cdot 10^3$  durchgeführt. Aufgetragen ist die Breite  $\sigma_z$ . Die Amplitude der Oszillation in  $y$ -Richtung liegt unterhalb des Auflösungsvermögens der Abbildung und kann aus diesem Grund nicht beobachtet werden. Man erhält  $\frac{\omega_{\text{qp}}}{\omega_z} = 1.7 \pm 0.2$ .

Mit der in Abschnitt 2.1.4 vorgestellten Abschätzung wird die Ausdehnung des Kondensates unter Berücksichtigung der repulsiven Wechselwirkung berechnet. Mit Hilfe der drei gemessenen Fallenfrequenzen (siehe Gl. 4.1) und der Atom-



**Abbildung 4.2:** Zusätzlich zu der Dipolschwingung, die das Kondensat in der Falle ausführt, wird noch die Quadrupolmode  $m = 0$  beobachtet. Bei dieser oszilliert die Form des Kondensats mit der Frequenz  $\omega_{\text{qp}} = 2\pi \cdot (94 \pm 11) \mu\text{m}$ . Aufgetragen ist die Breite  $\sigma_z$  in  $z$ -Richtung des Kondensats. Sie oszilliert mit dem  $1.7 \pm 0.2$  fachen der Fallenfrequenz  $\omega_z$ .

zahl wird der Radius des Grundzustands bestimmt. Im Vergleich zum wechselwirkungsfreien Fall beträgt der in Thomas-Fermi-Näherung bestimmte Radius  $R_{\text{TF}} = 1.7R_0$ . Damit gilt:

$$\frac{E_{\text{kin}}}{E_{\text{pot}}} = \left(\frac{R_{\text{TF}}}{R_0}\right)^{-4} = 0.12 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\omega_{\text{qp}}}{\omega_z} = 1.46 \quad (4.2)$$

Mit der Näherung von Baym und Pethick, die bei kleineren Atomzahlen besser geeignet ist, lautet der Radius  $R_{\text{BP}} = 1.4R_0$ . Damit folgt  $\frac{\omega_{\text{qp}}}{\omega_z} = 1.5$

Die Theorie sagt demnach einen Wert von  $1.46 - 1.5$  in Abhängigkeit der Näherungsmethode voraus, was noch im Rahmen des Fehlers mit dem Experiment übereinstimmt. Die Näherungsmethode von Baym und Pethick scheint hier die bessere zu sein. Desweiteren ist die Anisotropie der Dipolfalle nicht in der Theorie enthalten. Deren Berücksichtigung hätte eine weitere Korrektur zur Folge. Systematische Untersuchungen wären an dieser Stelle erforderlich, die aber von uns aus zeitlichen Gründen nicht durchgeführt werden konnten.

### (b) Parametrisches Heizen

Um die Fallenfrequenzen des periodischen Gitters zu messen ist die oben verwendete Methode ungeeignet. Das Auflösungsvermögen der Abbildung reicht nicht aus um die Bewegung der Atome in den mehreren jeweils  $5 \mu\text{m}$  voneinander separierten Potentialtöpfen ausreichend zu beobachten. Es besteht jedoch eine indirekte Möglichkeit die Lokalisierung nachzuweisen: Die Messung der Vibrationsfrequenzen der Atome im Fallenpotential. Die Vibrationsfrequenzen lassen sich durch parametrisches Heizen des Gitters bestimmen.

## Theorie

Die Theorie der parametrischen Resonanz ist ausführlich in [73] beschrieben. Dabei handelt es sich um nichtabgeschlossene Schwingungssysteme, bei denen die äußere Einwirkung in einer zeitlichen Veränderung ihrer Parameter besteht. Ein einfaches Beispiel eines solchen Systems ist ein Pendel, dessen Aufhängepunkt eine vorgegebene periodische Bewegung in vertikaler Richtung ausführt. Die Parameter eines eindimensionalen Systems sind die Koeffizienten  $m$  und  $k$ . Wenn nur  $k$  von der Zeit abhängt und die Masse  $m$  konstant ist, lautet die allgemeine Bewegungsgleichung:

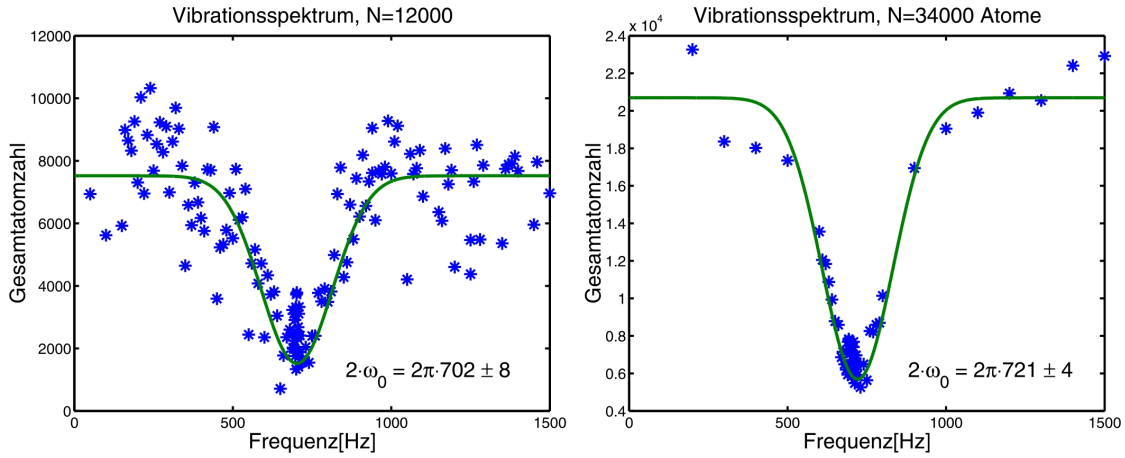
$$\ddot{x}(t) + \omega^2(t)x(t) = 0 \quad (4.3)$$

$\omega(t) = \omega(t + T)$  ist eine periodische Funktion mit der Frequenz  $\nu$  (Periode  $T = 2\pi/\nu$ ). Damit ist die Differentialgleichung invariant unter der Transformation  $t \rightarrow t + T$ . Man kann zeigen, daß zwei unabhängige Lösungen  $x_1(t) = \alpha^{t/T} f_1(t)$  und  $x_2(t) = \alpha^{-t/T} f_2(t)$  existieren. Dabei ist  $\alpha$  eine reelle Konstante,  $f_1$  und  $f_2$  sind rein periodische Funktionen der Zeit mit der Periode  $T$ . Eine dieser Lösungen wächst exponentiell mit der Zeit an, d.h. eine beliebig kleine anfängliche Störung der Ruhelage führt zu einer sich schnell vergrößernden Auslenkung. Es sei darauf hingewiesen, daß für den Fall, wenn  $x$  und  $\dot{x}$  zu Anfang streng gleich null sind, sie dies auch für alle späteren Zeiten bleiben (im Gegensatz zur gewöhnlichen Resonanz). Wählt man als einfache periodische Funktion  $\omega^2(t) = \omega_0^2(1 + h \cos(\omega t))$  ( $h \ll 1$ ), die sich nur wenig von der konstanten Größe  $\omega_0$  unterscheidet, kann man zeigen, daß die parametrische Resonanz am stärksten auftritt, wenn die Anregung des Systems mit dem Doppelten dieser Größe auftritt, bei  $\omega = 2\omega_0$ . Man nennt diesen Vorgang parametrische Resonanz. Dieses Phänomen tritt auch bei der Anwesenheit von Reibung auf. Es sei erwähnt, daß in diesem Fall die Resonanz nur oberhalb einer bestimmten Schwelle der Amplitude  $h$  möglich ist.

## Messung

Die Anregung der Atome in einem eindimensionalen harmonischen Potential durch Modulation der Potentialtiefe lässt sich durch Bewegungsgleichung 4.3 beschreiben. Praktisch verfährt man so, daß ein BEC adiabatisch in das Gitter umgeladen wird. Es werden zirka 10 Gitterplätze besetzt. Einer der beiden Laserstrahlen, die das Gitter erzeugen, wird in seiner Intensität moduliert, während der andere auf eine bestimmte Intensität stabilisiert ist. Die Amplitudenmodulation beträgt  $\simeq 40\%$ . Dazu erhält der AOM eine sinusförmige Wechselspannung, die ein Frequenzgenerator (Stanford Research Systems DS 345) liefert. Bei jeder Frequenz wird die Stehwelle für eine Dauer von 2 s moduliert und anschließend die Zahl der im Gitter verbleibenden Atome bestimmt. Die Zahl der Zyklen variiert demnach. Ist man weit von der Resonanz entfernt, so werden nur wenige Atome herausgeheizt und die Zahl der durchlaufenen Zyklen scheint keine nennenswerte Rolle zu spielen. Sowohl bei 200 als auch bei 1500 Hz verbleiben etwa  $7.5 \cdot 10^3$  bzw.  $21 \cdot 10^3$  Atome im Gitter. Die anfänglichen Atomzahlen werden bei ausgeschaltetem Gitter gemessen und betragen  $12 \cdot 10^3$  bzw.  $34 \cdot 10^3$  Atome. Bei einer Modulationsfrequenz von





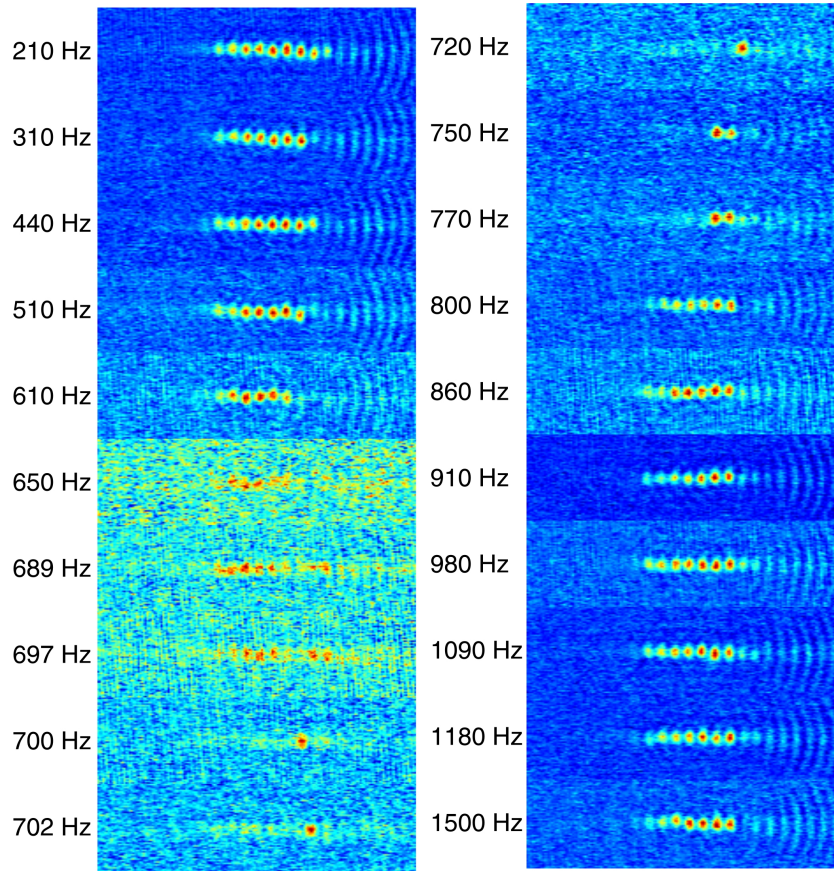
**Abbildung 4.3:** Vibrationsspektrum des optischen Gitters. Ein BEC wird in die Stehwelle geladen, welche mit einer bestimmten Anregungsfrequenz für eine Dauer von jeweils 2 s moduliert wird. Die Modulationstiefe beträgt 40 %. Aufgetragen ist die Zahl der im Gitter verbleibenden Atome. Die parametrische Resonanz tritt bei der doppelten Oszillationsfrequenz der Atome im Gitter auf. Die Daten wurden für verschiedene Atomzahlen aufgenommen ( $N = 12000$ ,  $N = 34000$ ). Diese Zahlen beziehen sich auf Messungen, bei denen das Gitter ausgeschaltet ist.

genau dem Zweifachen der Oszillationsfrequenz der Atome, sollten diese nahezu vollständig herausgeholt werden. Wie aus Abb. 4.3 hervorgeht tritt die parametrische Resonanz bei  $2\omega_0 = 2\pi \cdot (702 \pm 8)$  Hz und  $2\omega_0 = 2\pi \cdot (721 \pm 4)$  Hz auf.

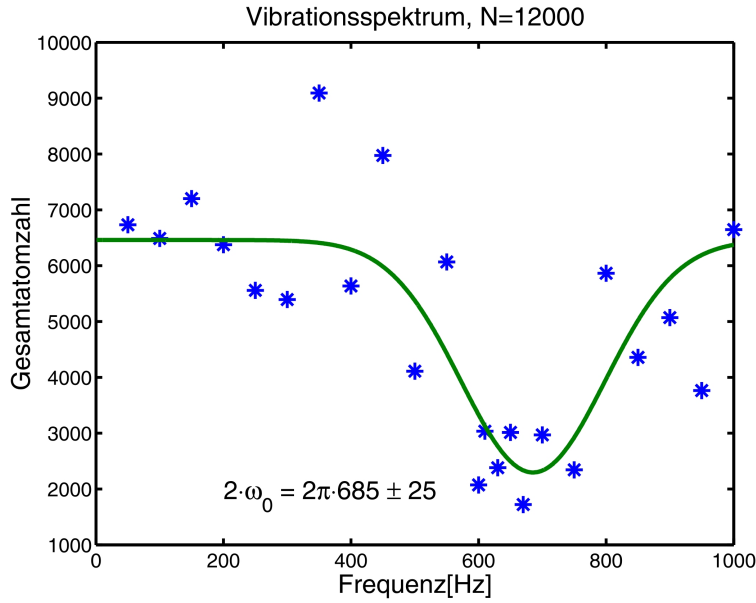
Jedoch treten hier Effekte auf, die von uns nicht verstanden werden. Wie man anhand der Bilder 4.4 erkennen kann, werden bei der Resonanz nicht alle Atome aus dem Gitter herausgeholt. Es scheint einen Gitterplatz zu geben, wo Atome bei der Resonanz nicht aus der Falle geholt werden. Dieser ist nicht identisch bei jedem Zyklus. Grund dafür kann eine mögliche Verschiebung oder Asymmetrie des Gitters sein. Es wäre auch möglich, daß es sich um einen nichtlinearen Effekt handelt, der sehr kritisch mit der Anfangsatomzahl zusammenhängt. Bisher findet sich in der Literatur keine Erklärung dafür.

### Thermische Atome

Das parametrische Heizen kann auch mit einer thermischen Atomwolke durchgeführt werden. Die Atome werden in der Dipolfalle gekühlt, aber nicht zur Kondensation gebracht. Es wird eine Atomwolke mit anfänglich  $1 \cdot 10^4$  Atomen in das Gitter geladen und seine Amplitude wiederum jeweils 2 s mit einer Frequenz von 50-1000 Hz moduliert. Die parametrische Resonanz tritt bei  $2\omega_0 = 2\pi \cdot (685 \pm 25)$  Hz auf. Damit ergibt sich bei einer Wellenlänge des Gitters von  $\lambda_{\text{sw}} = 784.64$  nm eine Potentialtiefe von  $V_0 = (0.34 \pm 0.01)E_{\text{rec}}$ .



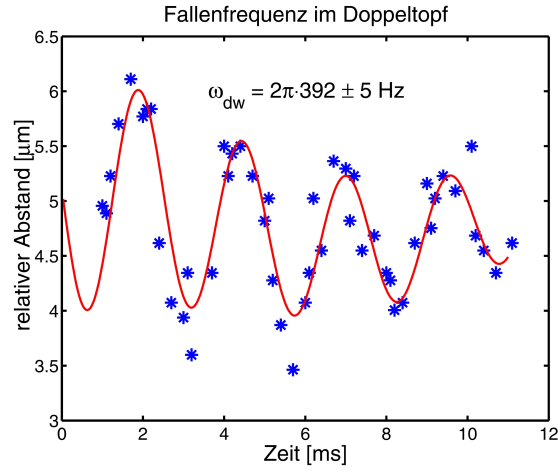
**Abbildung 4.4:** Die Gittertiefe wird bei einer bestimmten Frequenz für jeweils 2 s moduliert (Modulationstiefe 40 %). Man sieht die Dichteverteilung der einzelnen Kondensate der entsprechenden Gitterplätze. Die Resonanz liegt bei 702 Hz. Es werden nicht alle Atome herausgeholt. Es gibt einen Gitterplatz, auf dem die Atomzahl wahrscheinlich aufgrund der nichtlinearen Wechselwirkung stabilisiert ist. Dieser kann zwischen den Zyklen um einen Platz variieren. Grund dafür könnte eine Verschiebung oder Asymmetrie des Gitters sein.



**Abbildung 4.5:** Eine kalte Atomwolke von anfänglich 10000 Atomen wird in das Gitter geladen. Die Gittertiefe wird bei einer bestimmten Frequenz für jeweils 2 s moduliert. Die parametrische Resonanz liegt bei 685 Hz. Bei einer Wellenlänge von  $\lambda_{\text{lat}} = 784.64 \text{ nm}$  beträgt die Potentialtiefe  $V_0 = (0.34 \pm 0.01) E_{\text{rec}}$

### (c) Relative Position

Eine weitere Methode der Eichung des Doppelmuldenpotentials hat sich als sehr praktikabel erwiesen. Ziel ist die relative Oszillation einzelner Kondensate direkt in zwei benachbarten Töpfen zu beobachten. Dazu wird ein Kondensat in der 3D-Dipolfalle erzeugt und anschließend die Stehwelle hochgefahren. Dann wird der x-DT ausgeschaltet und gleichzeitig das periodische Potential vergrößert. Das Ausschalten des x-DT ist erforderlich um die Potentialminima weiter voneinander zu separieren. Der Strahl des y-DT wird währenddessen mit konstanter Leistung betrieben. Das hat zur Folge, daß sich das BEC teilt und jeweils Dipoloszillationen in der Mulde ausführt. Die Potentialhöhe der Stehwelle und die zeitliche Abfolge der Rampen muß so gewählt werden, daß Atome nicht durch die Barriere tunneln können. Die Amplitude der Oszillation sollte so groß wie möglich sein, da die Abbildung nur ein begrenztes Auflösungsvermögen hat. Plötzliches Einschalten der Stehwelle direkt im Anschluß an die Kondensation hat sich als problematisch herausgestellt. Schon nach kurzer Schwingungsdauer konnten keine Atome mehr nachgewiesen werden. Die numerische Simulation der auf diese Weise angeregten Dipoloszillationen hat gezeigt, daß das BEC kollabiert (es gibt eine komplexe Dynamik, die nicht mehr mit den Gleichungen beschreibbar ist, die bei der Simulation verwendet werden). Aus diesem Grund wird die Stehwelle auf eine anfängliche Potentialhöhe ( $0.1 V_{\text{rec}}$ ) gefahren, die so gewählt ist, daß sich das Kondensat in beide

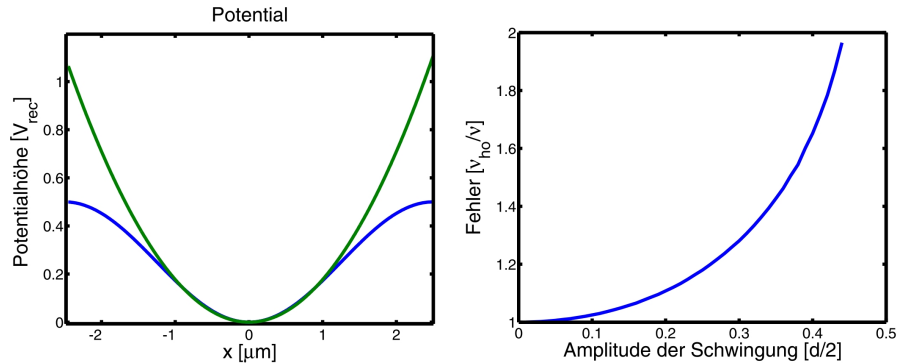


**Abbildung 4.6:** Bestimmung der Fallenfrequenz im Doppelmuldenpotential. Bei kleiner Potentialtiefe wird ein BEC in das Doppelmuldenpotential präpariert. Zur Anregung der Dipoloszillationen wird der x-DT ausgeschaltet und die Potentialtiefe der Stehwelle erhöht. Dadurch werden die Potentialminima von  $4.5$  auf  $5 \mu\text{m}$  separiert und mögliches Tunneln der Atome unterbunden. Nach variabler Evolution des BEC im Potential wird seine Dichteverteilung abgebildet und ihr relativer Abstand als Funktion der Zeit bestimmt. Man erhält eine Fallenfrequenz von  $\omega_{dw} = 2\pi \cdot (392 \pm 5)$  Hz.

Potentialtöpfe verteilt. Anschließend wird die Stehwelle instantan erhöht und der x-DT ausgeschaltet. Die Potentialminima werden dadurch von  $4.5 \mu\text{m}$  auf  $5 \mu\text{m}$  separiert und die einzelnen Kondensate führen die zu beobachtenden Dipoloszillationen aus. Nach variablem Aufenthalt im Potential wird die Dichteverteilung der Atome abgebildet und ihr relativer Abstand als Funktion der Zeit bestimmt (Abb. 4.6).

Die gemessene Amplitude beträgt  $2 \mu\text{m}$  und die ermittelte Fallenfrequenz  $\omega_{dw} = 2\pi \cdot (392 \pm 5)$  Hz. Das entspricht einer Potentialhöhe von  $V_0 = 0.5 V_{\text{rec}}$ .  $V_{\text{rec}} = \hbar^2 k_{\text{sw}}^2 / 2m$  ist die Photonenrückstoßenergie mit  $k_{\text{sw}} = 2\pi / \lambda_{\text{sw}}$ . Die Wellenlänge der Gitter erzeugenden Laserstrahlen beträgt  $\lambda_{\text{sw}} = 785 \text{ nm}$ . Um  $V_0$  zu bestimmen wird das periodische Potential harmonisch genähert. Man entwickelt  $V_{\text{sw}} = V_0 \cos^2(\pi x / q_0)$  nach Taylor an der Stelle  $x = q_0$  und erhält  $V_0 = 2m q_0^2 \nu^2$ . Dabei ist  $\nu$  die gemessene Fallenfrequenz.

Da die Güte der harmonischen Näherung eines sinusförmigen Potentials sehr stark von der Größe der Auslenkung abhängt, muß diese bei der Bestimmung der Potentialtiefe mit berücksichtigt werden. Die Oszillationsfrequenz  $\nu$  des Kondensats in einem sinusförmigen Potential ist kleiner als im harmonischen Fall. Das hat zur Folge, daß man die in harmonischer Näherung bestimmte Potentialtiefe unterschätzt. In Abhängigkeit der Amplitude der Schwingung muß die Frequenz korrigiert werden. Abbildung 4.7 zeigt das tatsächlich vorhandene Sinuspotential

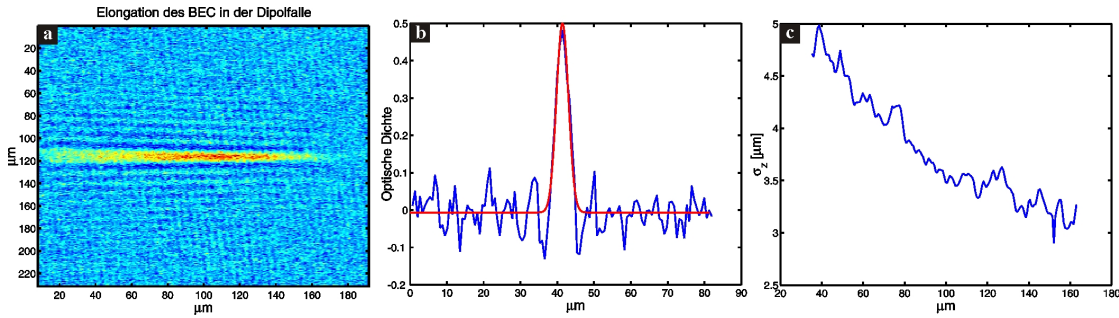


**Abbildung 4.7:** Die Güte der harmonischen Näherung eines sinusförmigen Potentials ist stark von der Auslenkung der Schwingung abhängig. Links: Man erhält die harmonische Näherung (grün) durch eine Taylorentwicklung am Minimum des Sinuspotentials (blau) bis zur 2. Ordnung. Rechts: In Abhängigkeit der Amplitude (in Einheiten des halben Gitterkonstante  $d$ ) muß die mit Hilfe der gemessenen Fallenfrequenz und in harmonischer Näherung bestimmte Potentialtiefe nach oben korrigiert werden. Bei einer Auslenkung von 20% beträgt die Korrektur  $\simeq 10\%$  und damit die Potentialtiefe  $V_0 = 0.5 V_{\text{rec}}$ .

und die harmonische Näherung. Bei sehr kleinen Auslenkungen ist die Näherung gut. Bei einer Amplitude von nur 20% der halben Separation der Potentialminima, was in unserem Fall einem Wert von  $0.5 \mu\text{m}$  entspricht, wird die Potentialtiefe um  $\simeq 10\%$  unterschätzt. Die Potentialtiefe muß von  $V_0 = 0.45 V_{\text{rec}}$  auf  $V_0 = 0.5 V_{\text{rec}}$  nach oben korrigiert werden.

### 4.1.2 Güte der Abbildung

Weil die abzubildenden Objekte kleiner sind als das Auflösungsvermögen der Abbildung werden Beugungsstrukturen auf den Bildern sichtbar. Sehr offensichtlich werden diese Strukturen, wenn man ein BEC im y-DT expandieren läßt und anschließend abbildet. Hierbei wird der y-DT bei hoher Leistung betrieben, um einen großen transversalen Einschluß der Atome zu erzeugen. Abb. 4.8 (a) zeigt ein Kondensat mit  $N = 1.8 \cdot 10^4$  Atomen nach einer Expansionszeit von 30 ms. Deutlich sind die Beugungsstrukturen zu erkennen. Die gefittete Breite ( $1/e^2$ -Breite einer Gaußkurve) beträgt  $3.2 \mu\text{m}$  in  $z$ - und  $120 \mu\text{m}$  in  $y$ -Richtung (b). Für unsere Abbildung (Brennweite  $f = 10 \text{ cm}$  und Radius  $r = 2.25 \text{ cm}$ ) ergibt sich das Auflösungsvermögen nach Rayleigh zu  $1.22\lambda f/r = 4.2 \mu\text{m}$ . Weil die Wolke aus der Fokalebene und dem Bereich der Tiefenschärfe der Abbildung expandiert, steigt die aufgelöste Breite zum Rand der Wolke hin an. Abb. 4.8 (c) zeigt die Breiten  $\sigma_z$  des elongierten BEC in Abhängigkeit von der  $x$ -Position. Deutlich ist zu erkennen, daß sich der Fokus der Abbildung nicht im Zentrum der Wolke befindet. Hauptursache dafür ist die Neigung des Y-DT Strahls. Unter dem Einfluß der Gravitation

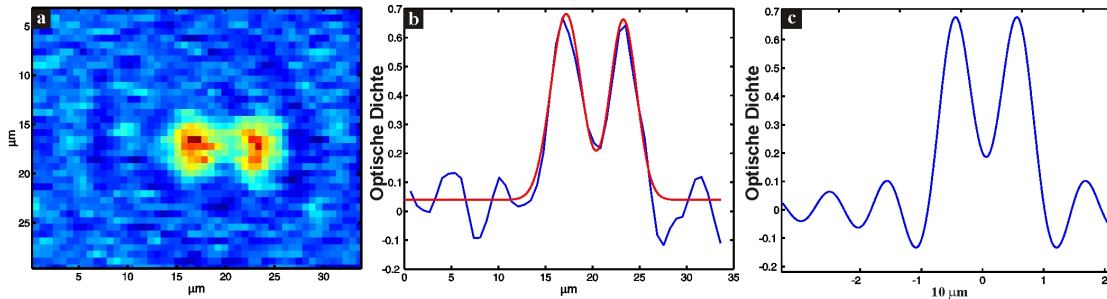


**Abbildung 4.8:** (a) Elongation eines BECs mit  $N = 1.8 \cdot 10^4$  Atomen im y-DT. Die Expansionszeit beträgt 30 ms. Deutlich sind die Beugungsstrukturen in transversaler Richtung zu erkennen. Die Breite des Kondensats liegt unter dem Auflösungsvermögen der Abbildung. (b) Man erhält die  $1/e^2$ -Breiten durch den Fit der gemessenen Kurve (blau) mit einer Gaußfunktion (rot). Sie beträgt in  $y$ -Richtung  $3.2 \mu\text{m}$  und in  $z$ -Richtung  $120 \mu\text{m}$ . (c) Weil die Wolke aus der Fokalebene und dem Bereich der Tiefenschärfe der Abbildung expandiert, steigt die aufgelöste Breite zum Rand der Wolke hin an. Gezeigt sind die Breiten  $\sigma_z$  des elongierten BEC in Abhängigkeit von der Position. Die minimale Auflösung im rechten Teil der Wolke beträgt  $3.1 \mu\text{m}$ .

wird der Massenschwerpunkt des BEC während der Expansion im y-DT in die Richtung der Neigung beschleunigt. Das ist auch der Grund dafür, daß die Expansionszeit nur 30 ms beträgt. Bei größeren Zeiten würde das Kondensat aus diesem Grund den erfassten Bildausschnitt verlassen und könnte nicht mehr abgebildet werden.

Es gibt noch eine andere Methode das Auflösungsvermögen der Abbildung zu bestimmen. Dazu wird ein Kondensat in das Doppeltopfpotential geladen und abgebildet. Das Bild zeigt Abb.4.9 (a). Die Töpfe sind mit je  $N = 750$  Atomen gleich besetzt und die Fallenfrequenzen betragen  $\omega_{x,z} = 2\pi \cdot 60 \text{ Hz}$  und  $\omega_y = 2\pi \cdot 320 \text{ Hz}$ . Die Dichtemaxima haben einen Abstand von  $d = 6 \mu\text{m}$ . In (b) ist die optische Dichte des Doppelkondensats in Abhängigkeit der Position, sowie eine an diese Daten gefitte Doppelgaußkurve gezeigt, deren Modulationstiefe 75 % beträgt. Die  $1/e^2$ -Breiten des Fits sind  $3.2 \mu\text{m}$  und  $2.8 \mu\text{m}$ . Die Thomas-Fermi-Näherung ist für diese Parameter ungeeignet, da die Nichtlinearität aufgrund der relativ niedrigen Atomzahlen klein ist. Die im Theorieteil Abschnitt 2.1.2 beschriebene numerische Methode von Baym und Pethick [53] bietet eine bessere Beschreibung. Damit errechnet sich die  $1/e^2$ -Breite des Grundzustands mit diesen Parametern zu  $\sigma_{\text{gp}} = 1.9 \mu\text{m}$ .

Nun kann die relative absorbierte Intensität eines Doppelkondensats mit den Breiten  $\sigma_{\text{gp}}$ , dem Abstand  $d$  der Dichtemaxima bei einer optischen Dichte von 0.65 bestimmt werden (siehe Abb. 4.9 (c)). Die numerische Simulation ist ein-dimensional und verwendet die Fraunhofer-Näherung [74]. Damit sich jedoch die



**Abbildung 4.9:** (a) Doppelkondensat im periodischen Potential. Die Separation der Potentialtöpfe beträgt  $6 \mu\text{m}$  und sie beinhalten jeweils 750 Atome. (b) Man erhält die Breiten und die Modulation durch den Fit der gemessenen Kurve (blau) mit einer Doppel-Gaußfunktion (rot). Die Breiten betragen im Mittel  $3 \mu\text{m}$  und die Modulation liegt bei 75%. (c) Die relative absorbierte Intensität eines Doppelkondensats mit einer berechneten Breite von jeweils  $1.9 \mu\text{m}$  wird für die Abbildung numerisch bestimmt. Damit sich jedoch diese berechneten Abstände der Beugungsordnungen mit den experimentellen decken, muß eine numerische Apertur von  $NA = 0.132$  angenommen werden. Aus den Eigenschaften der Abbildungslinse leitet sich aber  $NA = 0.225$  ab. Diese Abweichung ist vermutlich auf die sphärische Abberation des Objektivs zurückzuführen. Aus der Simulation der Abbildung einer Doppel-Punktquelle :) erhält man die optische Auflösung von  $2.9 \pm 0.4 \mu\text{m}$ .

Abstände der Beugungsordnungen sowie die Modulationstiefe mit den experimentellen Werten decken, muß eine numerische Apertur von  $NA = 0.132$  angenommen werden. Nachdem auf diese Weise die Eigenschaften der Abbildung in die Simulation implementiert sind, kann mit ihrer Hilfe die relative absorbierte Intensität einer Doppel-Punktquelle (mit dem Abstand  $d$  und einer jeweiligen Breite von  $0.1 \mu\text{m}$ ) berechnet werden. Das liefert die optische Auflösung der Abbildung von  $(2.9 \pm 0.4) \mu\text{m}$ . Die Unsicherheit resultiert aus dem Fitfehler.

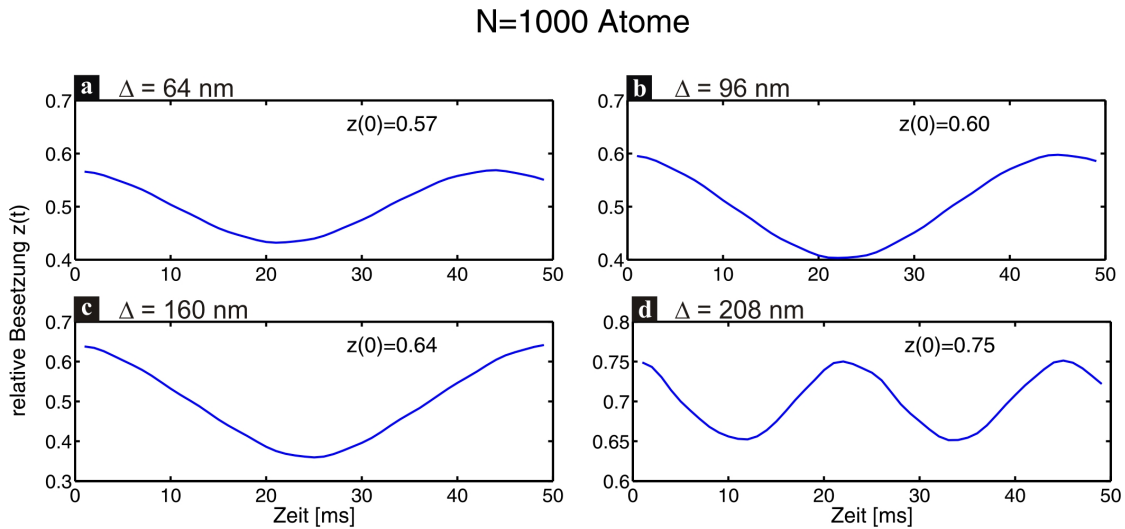
Aus den Eigenschaften der Abbildungslinse leitet sich aber  $NA = 0.225$  ab. Das ist vermutlich auf die sphärische Abberation der Linse zurückzuführen. Die Rand- und Mittelzonen bündeln die Lichtstrahlen nicht im Brennpunkt des Objektivs. Die Bündelung parallel eintreffender Strahlen im Brennpunkt ist daher nur für achsennahe Strahlen gegeben.

Die Modulation der Dichteverteilung von Kondensaten, die in der Stehwelle ( $d = 5 \mu\text{m}$ ) abgebildet werden, beträgt  $\sim 65\%$ . Man kann die Modulationstiefe jedoch noch weiter vergrößern. Ungefähr 2 ms vor dem Zeitpunkt der Abbildung wird die Intensität der Stehwelle erhöht und gleichzeitig die x-DT Falle ausgeschaltet. Die Barrierenhöhe beträgt dann zirka  $V_0 = 0.5E_{\text{rec}}$  und durch den fehlenden Einschluß aufgrund des x-DT werden die Atome weiter voneinander separiert. Das verhindert das Tunneln der Atome und die beiden Kondensate werden zu einer Dipolschwingung mit Phasenverschiebung  $\pi$  angeregt. Es wird dann abgebildet, wenn

die Kondensate möglichst weit voneinander entfernt sind. Der Zeitpunkt der Abbildung wurde auf maximale Separation hin optimiert. Damit verbessert sich die Modulationstiefe auf die oben schon erwähnten 75 %.

## 4.2 Josephson Effekt in BECs

### 4.2.1 Experimentelle Parameter



**Abbildung 4.10:** Gezeigt ist das Ergebnis einer Simulation der Josephson-Oszillationen für ein BEC mit  $N = 1000$  Atomen. Dargestellt ist die zeitliche Änderung der relativen Besetzung der Potentialtöpfe. Form und Periode der Oszillation reagieren empfindlich auf die Anfangsbesetzung  $z(0)$ . Diese variiert von  $z(0) = 0.57$  bis  $z(0) = 0.75$  und wird durch die Variation  $\Delta$  der Position des x-DT Strahls verursacht. (a)-(c): Mit zunehmender Anfangsbesetzung werden Anharmonizität und Periode der Schwingung größer. (d): Überschreitet die Anfangsbesetzung einen kritischen Wert  $z(0) \gtrsim z_c \simeq 0.75$ , kommt es zu MQST. Die relative Besetzung oszilliert mit kleiner Amplitude und beträgt im zeitlichen Mittel  $\langle z \rangle = 0.7$ . Die für die Simulation verwendeten Parameter müssen sehr genau aufeinander abgestimmt sein. Schon bei kleinen Abweichungen werden die Oszillationen stark gestört.

Mit Hilfe der in Abschnitt 2.4 vorgestellten numerischen Methoden ist es möglich das Josephson-Tunneln in Abhängigkeit der relevanten Parameter numerisch zu simulieren. Die Ergebnisse helfen dabei, den richtigen Parameterbereich zu finden und die Einstellung am experimentellen System dementsprechend vornehmen zu können. Die relevanten Parameter sind: Gesamtatomzahl  $N$  des BECs, Gitterperiode  $d$  der Stehwelle und Höhe  $V_0$  der Tunnelbarriere, sowie Fallenfrequenzen und Anfangsbesetzung des Doppelpotentials.

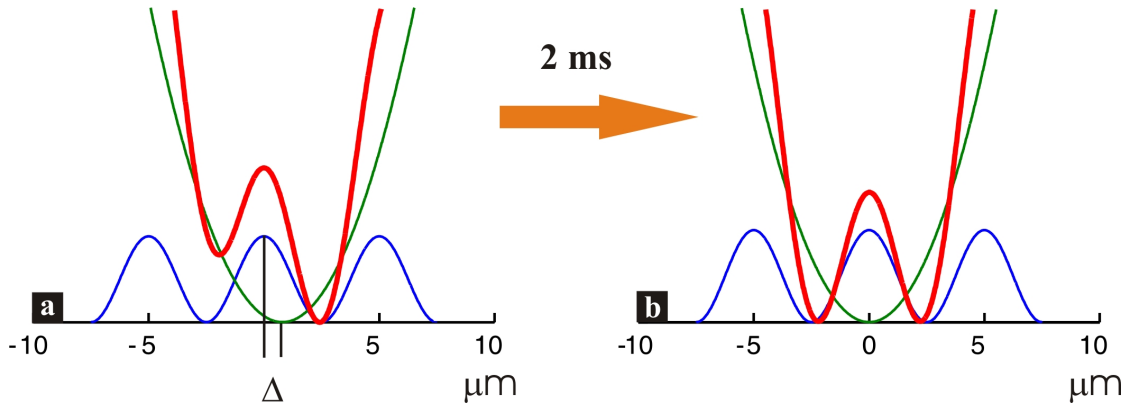


Durch das optische Auflösungsvermögen der Abbildung sind wir mit der Gitterperiode auf  $d = 5 \mu\text{m}$  festgelegt. Die Atomzahl des BECs sollte dann in der Größenordnung von  $N \sim 1000$  Atomen liegen. Um in diesen Rahmenbedingungen Josephson-Oszillationen beobachten zu können muß die Höhe der Tunnelbarriere  $V_0 = 0.11E_{\text{rec}}$  betragen. Der Größe  $E_{\text{rec}}$  liegt eine Wellenlänge von  $\lambda_{\text{sw}} = 785.05 \text{ nm}$  des Gitter erzeugenden Lasers zugrunde. Für die Simulation werden folgende Fallenfrequenzen angenommen:  $\omega_x = 2\pi \cdot 59 \text{ Hz}$ ,  $\omega_y = 2\pi \cdot 80 \text{ Hz}$  und  $\omega_z = 2\pi \cdot 54 \text{ Hz}$ . Sie entsprechen in etwa denen unseres Experiments. Das Verhältnis von chemischem Potential des Grundzustands zur Höhe der Tunnelbarriere berechnet sich mit obigen Parametern zu  $\mu/V_0 = 0.87$ . Abb. 4.10 zeigt das Ergebnis der Simulation der erwarteten Oszillationen für ein Kondensat mit  $N = 1000$  Atomen. Die Werte für die relative Besetzung  $z(t)$  liegen nicht im Intervall  $[-1, 1]$ , wie in der Referenz [60] angegeben und im theoretischen Abschnitt 2.3.1 beschrieben, sondern werden von uns umskaliert zu  $z = (z_{\text{ref}} + 1)/2 \in [0, 1]$ . Damit gibt  $z$  die prozentuale Verteilung der Atome in den Potentialtöpfen wieder.  $z = 0.7$  bedeutet, daß sich 70 % der Atome in einem und 30 % im anderen Topf befinden. Bei  $z = 0.3$  ist es umgekehrt. Die Anfangsbesetzung  $z(0)$  nimmt in der Simulation Werte zwischen 0.57 und 0.75 an und wird durch die Variation  $\Delta$  der Position des x-DT gesteuert (eine detailliertere Beschreibung dieser Methode wird im nächsten Abschnitt gegeben). Sehr deutlich ist zu erkennen, daß mit zunehmender Anfangsbesetzung die Anharmonizität der Schwingung sowie die Periode größer werden (Abb. 4.10(a)-(c)). Bei Überschreitung eines kritischen Wertes, der bei dieser Konfiguration ungefähr  $z(0) \gtrsim z_c \simeq 0.75$  beträgt, findet MQST statt (Abb. 4.10(d)). Die zeitlich gemittelte Besetzungszahldifferenz ist dabei von null verschieden ( $\langle z \rangle = 0.7$ ). Die Periode hat sich im Vergleich zum näherungsweise harmonischen Fall (a) ungefähr halbiert. Es sei angemerkt, daß der Parameterbereich, in dem Josephson-Oszillationen auftreten können sehr stark eingeschränkt ist. Die in die Simulation eingehenden Größen müssen sehr genau aufeinander abgestimmt sein. Geringfügige Abweichungen von den idealen Parametern führen in der Simulation dazu, daß self-trapping auftritt oder die Oszillation nach einer halben Periode zum Erliegen kommen. Wir sind durch die Auflösung der Abbildung auf die minimale Gitterperiode festgelegt. Die Atomzahl der Kondensate hat bei unserem System ebenfalls eine untere Schranke von  $N \sim 1000$  Atomen. Das schränkt den Spielraum der ausstehenden Parameter stark ein. Bei zu großem Abstand der Potentialtöpfe oder zu großer Tunnelbarriere erhöht sich die Tunnelzeit, je nach Anfangsbesetzung, so daß die Josephson-Oszillationen auf sehr stark unterschiedlichen Zeitskalen stattfinden. Die Tunnelzeit muß viel kleiner sein als die Lebensdauer des BECs in der Falle (mehrere Sekunden). Die Potentialhöhe der Tunnelbarriere muß mit größerer Genauigkeit als 5 % bekannt sein. Diese Schwierigkeit läßt darauf schließen, daß der Nachweis der Josephson-Oszillationen problematisch ist. An die mechanische Stabilität des experimentellen Aufbaus werden enorm hohe Anforderungen gestellt.

### 4.2.2 Beobachtung erster Oszillationen

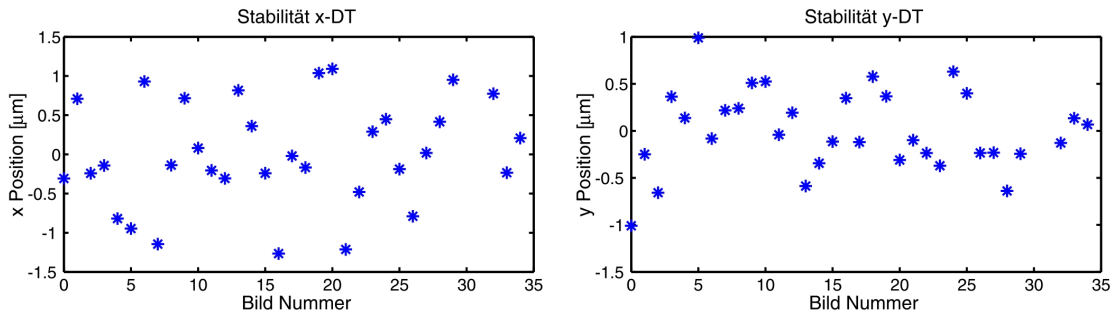
Wir haben das Doppelmuldenpotential mit rein optischen Fallen implementiert, um die Josephson-Oszillationen zu messen. Dafür ist es erforderlich die relevanten Parameter genau zu kennen und verändern zu können. Es zeigt sich, daß vor allem die Anfangsbesetzung der Potentialtöpfe einen entscheidenden Einfluß auf die Tunneldynamik ausübt. Deshalb kommt ihr eine besondere Bedeutung zu und sie muß möglichst genau reproduzierbar sein. In der 3D-Dipolfalle wird ein Kondensat hergestellt und anschließend die Stehwelle hochgerammt. Zusammen mit dem x-DT wird auf diese Weise ein Doppelmuldenpotential erzeugt, welches in 500 ms adiabatisch hochgefahren wird. Die Dauer der Rampe darf nicht zu kurz sein, damit dem Kondensat ausreichend Zeit gegeben wird seinen neuen Grundzustand einzunehmen und keine kollektiven Oszillationen angeregt werden. Die Anfangsbesetzung wird mit Hilfe der Asymmetrie des Doppeltopfpotentials gesteuert und durch eine zur Stehwelle relativen Positionsänderung des x-DT hergestellt. Dieser ist so montiert, daß seine Richtung mit Hilfe von Piezo-Elementen geändert werden kann. Der Auskoppler der Glasfaser für den x-DT Strahl ist in einem speziellen, von uns gebauten Spiegelhalter befestigt, in dem ein Piezo-Element eingebaut ist. Dieses befindet sich zwischen der Schraube, mit der die horizontale Justage vorgenommen wird und der beweglichen Halterung. Die Richtung des Laserstrahls wird nur soweit geändert, daß sich die Dipolfalle um ca.  $\Delta = 0.2 \mu\text{m}$  verschiebt. Das Potentialminimum der x-DT Falle ist dadurch gegen das Maximum der Stehwelle verschoben (Abb. 4.11). Innerhalb von 2 ms wird der x-DT Strahl zur symmetrischen Position gefahren und das Doppelkondensat abgebildet. Diese Rampe soll im Gegensatz zur ersten so kurz wie möglich sein. Das heißt, daß die Zeitskala der Rampe klein sein muß im Vergleich zur Tunnelzeit ( $\sim 20$  ms), in der die Josephson-Oszillationen stattfinden. Aus der Analyse der Bilder erhält man die momentane Besetzung der Potentialtöpfe. Das Piezoelement wird anhand der Bilder geeicht, so daß man in der Lage ist die anfängliche Besetzung des Potentials über die Spannung des Piezoelements einzustellen. Nach Wiederherstellung des symmetrischen Potentials, welches die gewünschte Anfangsbesetzung hat, wird nach variabler Zeit (0 – 50 ms) das Bild aufgenommen. Anhand der relativen Änderung der Besetzung kann auf die Tunneldynamik geschlossen werden.

Es hat sich herausgestellt, daß unser experimentelles System nicht die erforderliche mechanische Stabilität mit sich bringt um Josephson-Oszillationen beobachten zu können. Das macht sich vor allem bei den Atomzahlen der Kondensate bemerkbar. Diese schwanken um zirka  $\Delta N/N = 25\%$  für große ( $N \gtrsim 2000$ ) und  $\Delta N/N = 40\%$  für kleine ( $N \lesssim 2000$ ) Kondensate. Desweiteren sehen wir anhand der Bilder eine Veränderung der Position des Doppeltopfpotentials zwischen den Aufnahmen. Ursache dafür sind zufällige Phasenänderungen der Stehwelle und die mechanische Instabilität der Halterung für x- und y-DT sowie des Abbildungsstrahls. Als besonders kritisch hat sich die Befestigung des x-DT Auskopplers erwiesen (Abb. 4.12). Dort ist die Schwankung der gemessenen  $(x, y)$ -Position eines Kondensats gezeigt. 35 Bilder sind in Folge aufgenommen worden. Die Standard-



**Abbildung 4.11:** Zur Erzeugung einer ungleichen Anfangsbesetzung des Doppelpotentials wird die x-DT Falle mit Hilfe eines Piezo-Elements verrückt. (a) Die relative Verschiebung der Position des x-DT Strahls gegen die Stehwelle beträgt  $\Delta \simeq 0.2 \mu\text{m}$ . Das Potentialminimum der Dipolfalle (grün) fällt nicht mehr mit einem Maximum der Stehwelle (blau) zusammen. Die Potentiale addieren sich auf diese Weise zu einem asymmetrischen Doppelpotential (rot). Dieses wird adiabatisch hochgefahren, damit das Kondensat ausreichend Zeit hat seinen neuen Grundzustand einzunehmen. (b) In einer Zeit von 2 ms wird die Dipolfalle zur symmetrischen Position gefahren. Dieser Zeitraum muß im Vergleich zur Tunnelzeit ( $\sim 20 \text{ ms}$ ) klein sein, damit die Anfangsbesetzung während der Verschiebung konstant bleibt. Die Abstände der Potentialminima entsprechen den realen Abmessungen. Die Potentialtiefen sind in willkürlichen Einheiten aufgetragen. Das Doppelpotential (rot) wird nur qualitativ wiedergegeben.

abweichungen ( $\sigma_{n-1}$ ) der Position betragen  $\sigma_x = 670 \text{ nm}$  bzw.  $\sigma_y = 430 \text{ nm}$ . Die Reproduktion von Anfangsbedingungen mit ausreichender Genauigkeit ist somit nicht möglich. Dies ist die Hauptursache dafür, daß die Josephson-Oszillationen mit unserem System nur extrem schwer zu messen sind. Aus diesem Grund haben wir uns zuerst für einen anderen Parameterbereich entschieden: Das chemische Potential  $\mu$  des Grundzustands im Doppelpotential wird größer als die Höhe der Tunnelbarriere  $V_0$  gewählt. Das Verhältnis beträgt ungefähr  $\mu/V_0 \sim 1.5 - 1.9$ . Das chemische Potential wird für verschiedene Atomzahlen und Barrierenhöhen numerisch berechnet. Diese Konfiguration ist wesentlich einfacher zu realisieren und die dabei auftretenden Oszillationen können beobachtet werden. Es handelt sich bei dieser Bewegung jedoch nicht um Tunneln, sondern kann als kollektive Schwingung des BECs in einer harmonischen Falle mit Störung in ihrem Zentrum verstanden werden. Erste Messungen der Oszillationen mit dieser Konfiguration sind in Abb. 4.13 gezeigt. Wir sind in der Lage die Position  $\Delta$  des x-DT beliebig zu verfahren und verschiedene Anfangsbesetzungen  $z(0)$  zu realisieren, sowie ihre zeitliche Entwicklung zu beobachten. Die Anfangsbesetzung kann jedoch nur mit einem relativen Fehler von wenigstens 13 % eingestellt werden. Es gibt im Rahmen

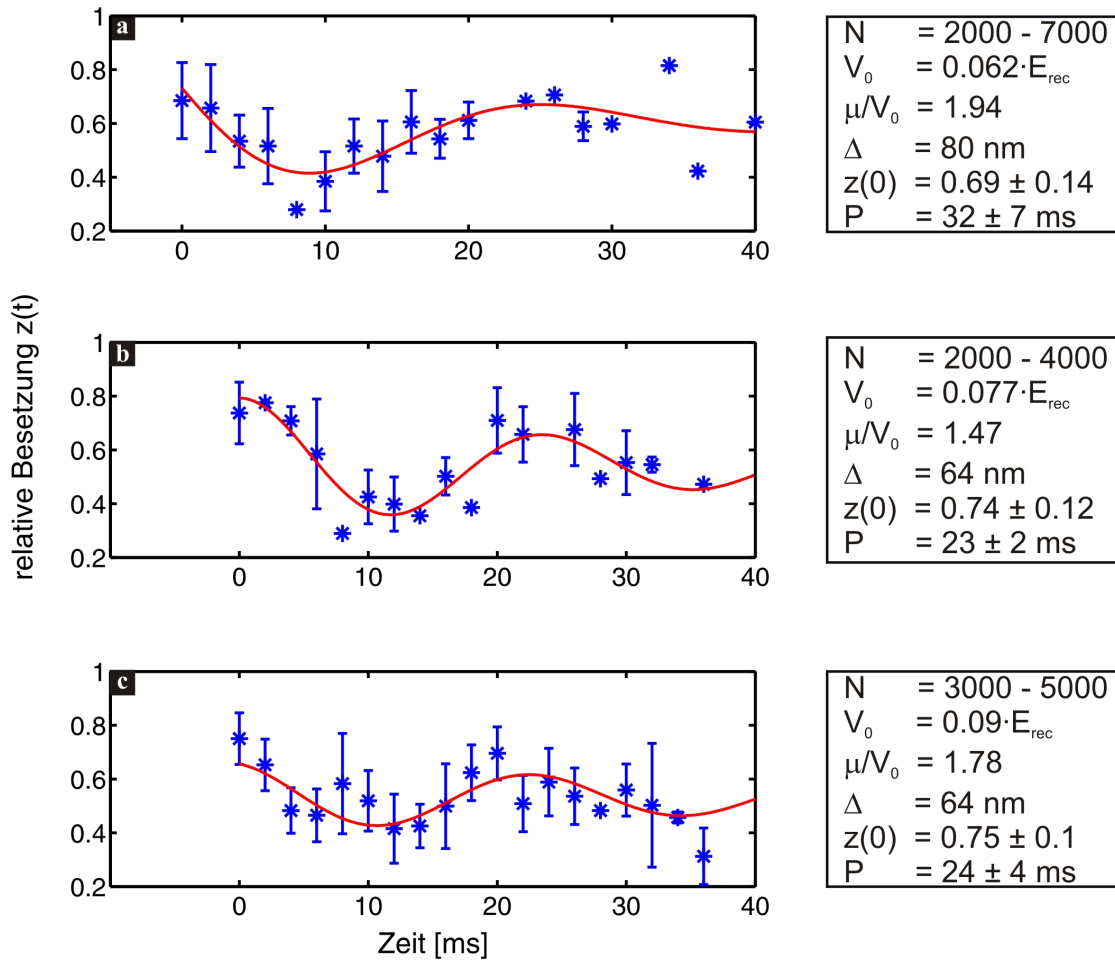


**Abbildung 4.12:** Gemessene  $(x, y)$ -Position des Kondensats auf 35 Bildern, die in Folge aufgenommen wurden. Die Standardabweichung beträgt in x-Richtung  $\sigma_x = 670 \text{ nm}$  und  $\sigma_y = 430 \text{ nm}$  in y-Richtung.

des Fehlers keinen signifikanten Größenunterschied der Periodendauern. Die Bilder dieser Oszillationen sind in Abb. 4.14 gezeigt.

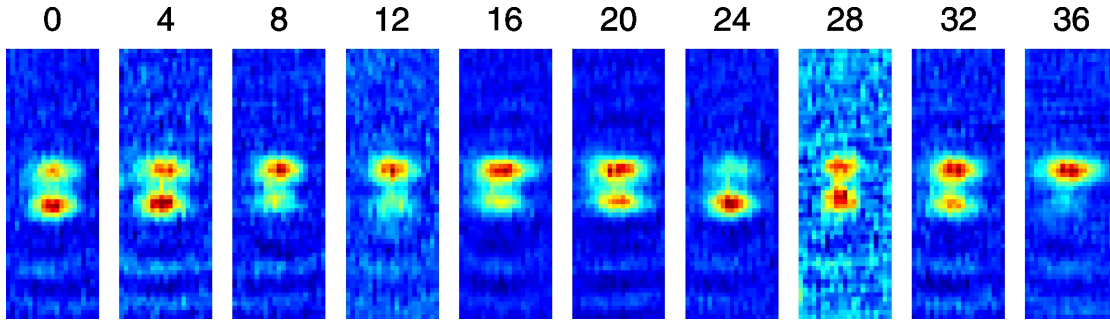
### 4.2.3 Mechanische Stabilität des Systems

Aufgrund der oben erwähnten Probleme haben wir den ursprünglichen Aufbau, wie er schematisch in Abb. 3.4 des Kapitels 3 dargestellt ist, sehr stark modifiziert. Die mechanische Stabilität der Laserstrahlen für x-DT und Abbildung hat sich als äußerst kritisch herausgestellt. Die Befestigung und mehrfache Verstrebung der betreffenden Spiegel und Auskoppler hat sich als unzureichend erwiesen. Abb. 4.15 zeigt ein Photo des neuen Aufbaus. Wir haben ein speziell angefertigtes Breadboard ( $30 \times 40 \text{ cm}^2$  Fläche, 1 cm Dicke) auf sechs massiven Aluminiumfüßen (Querschnitt  $6 \times 6 \text{ cm}^2$ ) fixiert und darauf die sensiblen Teile der Optik fixiert. Unter dem Breadboard wurde zusätzlich noch eine Querverstrebung angebracht. Das hat die effektive Länge der „mounts“ um zirka 17 cm verkürzt und damit ihre Schwingungsfähigkeit sehr stark reduziert. Die Abbildungslinse wurde ebenfalls auf einem massiven Aluminiumblock montiert. Die Wege der Laserstrahlen, die für Abbildung und x-DT verwendet werden, sind so kurz wie möglich gehalten. Auch der Strahlengang für den y-DT wurde dieser Maßnahme unterzogen. Die Linse, die für die Fokussierung der Dipolfallen erzeugenden Laser erforderlich ist, wurde auf die Auskopplern geklebt. Die Glasfasern für x- und y-DT (Thorlabs, 3M fs-pm 1064 singlemode, polarisationserhaltend), die wir selbst in die Ferrulen eingesetzt haben, wurden durch fertig konfektionierte Fasern der Firma Schäfter+Kirchhoff (PMC-1060-P) ersetzt. Deren Ein- und Auskoppler sind wesentlich fester mit der Faser verbunden und die Polarisationserhaltung ist besser. Die kritischen Elemente des optischen Aufbaus werden auf individuell angefertigten Teilen (aus dem Vollen gefrästes Aluminium) mit jeweils mehreren Schrauben angebracht und zusätzlich mit Epoxydharz-Kleber fixiert. Diese Aluminium Teile werden ihrerseits ebenfalls mehrfach auf dem Breadboard verschraubt. Durch diese Maßnahme konnte sehr



**Abbildung 4.13:** Demonstration von Oszillationen im Doppeltopfpotential (Gitterperiode  $d = 5 \mu\text{m}$ ). Dargestellt sind Messungen der relativen Besetzung der Töpfe für verschiedene Atomzahlen  $N$  und Barrierenhöhen  $V_0$ . Das Verhältnis von chemischem Potential des Grundzustands  $\mu$  zur Höhe der Tunnelbarriere  $V_0$  nimmt Werte von  $\mu/V_0 \simeq 1.5 - 1.9$  an ((a) bis (c)). Wir sind in der Lage mittels der Positionsänderung  $\Delta$  des x-DT eine beliebige Anfangsbesetzung herzustellen und deren zeitliche Entwicklung zu beobachten. Allerdings betragen die relativen Fehler von  $z(0)$  zwischen 13% und 20%. Die Größe der Periode zeigt keine signifikanten Unterschiede.

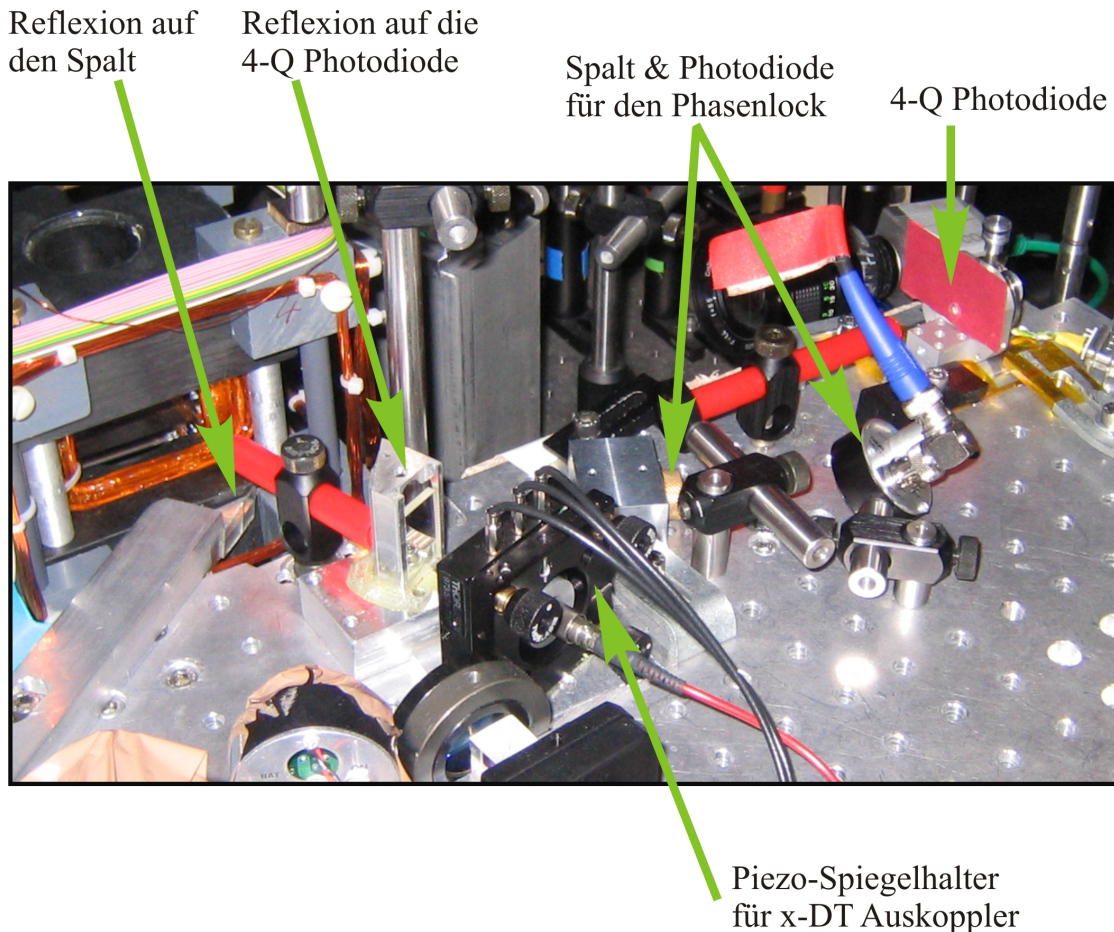
viel an mechanischer Stabilität gewonnen werden. Desweiteren haben wir versucht die Richtung des x-DT Laserstrahls über einen Proportional-Integral-Schaltkreis aktiv zu stabilisieren. Dazu werden 10% des Lichts mit einer Glasplatte aus dem Strahlengang heraus reflektiert. Die Intensität des Reflexes wird mit einer Vier-Quadranten Photodiode ortsaufgelöst gemessen. Die dafür erforderlichen Bauteile sind ebenfalls sehr stabil auf dem Breadboard fixiert. Die Richtung des Laserstrahls wird mit den Piezo-Elementen so gesteuert, dass das Spannungssignal der Vier-



**Abbildung 4.14:** Bilder der Oszillationen im Doppelpotential. Während der Oszillation sind die Potentialmulden  $\simeq 4.5 \mu\text{m}$  voneinander separiert. Zur Aufnahme des Bildes wird nach variabler Evolutionszeit der x-DT ausgeschaltet und die Stehwelle auf  $0.5E_{\text{rec}}$  erhöht. Dadurch wird die Separation der Kondensate vergrößert. Deutlich ist die zeitliche Entwicklung der relativen Besetzungszahlen zu erkennen. Die zu den Bildern gehörige Oszillation der relativen Besetzungszahl ist in Abb. 4.13(b) gezeigt.

Quadranten Photodiode (das der Reflex des Laserstrahls verursacht) mit einem vom Computer vorgegebenen Wert übereinstimmt. Leider hat sich die Auslese-Elektronik der Vier-Quadranten-Photodiode als zu langsam erwiesen, so daß mit dem Piezo-Auskoppler kein Sprung in der Zeit von 2 ms möglich ist (siehe vorheriger Abschnitt). Den von uns mit einem Piezo-Element modifizierten Spiegelhalter haben wir durch einen speziellen Piezo-Halter der Firma Thorlabs ersetzt. Die zwischen die Enden der Einstellschrauben und der beweglicher Halterung angebrachten Piezo-Elemente sind wesentlich stabiler befestigt. Die Summe dieser Änderungen resultiert in einer Stabilität der Position der 3D-Dipolfalle von  $78 \text{ nm}$  (Standardabweichung  $\sigma_{n-1}$  der Position von 20 Bildern).

Um die Stehwelle zu stabilisieren haben wir ihre Phase aktiv geregelt. Dazu koppeln zwei Glasplatten vor der Glaszelle ca. 10 % des Lichts aus den Gitter erzeugenden Laserstrahlen. Die jeweiligen Reflexe kreuzen sich kurz vor einem Spalt von  $5 \mu\text{m}$  Breite. Die Intensität des Beugungsbildes wird mit einer Photodiode gemessen. Die Glasplatten haben einen relativen Winkel von 5 Grad zueinander. Dadurch vergrößert sich im Überlappbereich der beiden Strahlen die Periodizität der resultierenden Stehwelle auf ca.  $10 \mu\text{m}$  (im Vergleich zur Gitterkonstanten von  $d = 5 \mu\text{m}$  in der Glaszelle). Man sieht auf der Photodiode eine Modulation von 40 % wenn die Phase von einem der beiden Strahlen geschoben wird. Die Phase wird auf das Signal der Photodiode aktiv stabilisiert und mit Hilfe von „RF-Phasenschiebern“ verändert. Diese sind in der Lage die Phase der Schallwelle im AOM zu steuern. Dank dieser Stabilisierung liegt die Position bei 90 % aller Bilder im Bereich von einem Pixel auf dem CCD-Chip der Kamera. Demzufolge wird die Unsicherheit der Position durch den Fitfehler dominiert. Vor dieser Maßnahme war nur jeder dritte Schuß im gewünschten Bereich.



**Abbildung 4.15:** Mechanische Stabilisierung der optischen Komponenten, die für das Josephson-Tunneln relevant sind. Ein Breadboard wird auf sechs massiven Aluminiumfüßen fixiert (nicht auf dem Photo zu erkennen). Die beiden Laserstrahlen für die Stehwelle verlaufen darunter und werden von unten über zwei Spiegel in die Glaszelle reflektiert. Sämtliche wichtigen Teile werden mit mehreren Schrauben und Epoxydharz-Kleber auf individuell gefrästen Aluminiumteilen befestigt. Diese sind ihrerseits jeweils mehrfach mit dem Breadboard verschraubt. Durch diese Maßnahmen ist der x-DT auf  $78\text{ nm}$  stabilisiert (Standardabweichung  $\sigma_{n-1}$  der Position von 20 Bildern). Eine genaue Beschreibung der einzelnen Teile findet sich im Text.





# Kapitel 5

## Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit ist der Aufbau eines rein optischen Doppelpotentials beschrieben, das zur Beobachtung von Josephson-Effekten in BECs benutzt werden kann. Das experimentelle System, wie es zu Beginn dieser Arbeit vorhanden war und schon in den Arbeiten [51, 50] Verwendung gefunden hat, wurde von uns modifiziert. Für den Aufbau einer Stehwelle wurde der von einem Verdi V10 gepumpte 899er Titan:Saphir-Laser (beide von der Firma Coherent) in Betrieb genommen. Die mechanische Stabilität des Systems konnte enorm verbessert werden. Dazu haben wir unter anderem ein speziell angefertigtes Breadboard auf sechs massiven Aluminiumfüßen fixiert und darauf die sensiblen Teile der Optik montiert. Das hat die effektive Länge der „mounts“ um zirka 17 cm verkürzt und damit ihre Schwingungsfähigkeit sehr stark reduziert. Die Wege der relevanten Laserstrahlen sind so kurz wie möglich gehalten. Eine neue Kamera (Theta-System), sowie die neue Abbildungslinse (Zeiss) wurden von uns implementiert. Damit konnte das optische Auflösungsvermögen der Abbildung auf  $3 \mu\text{m}$  verbessert werden. Die Modulation der Dichteverteilung von Kondensaten, die in der Stehwelle ( $d = 5 \mu\text{m}$ ) abgebildet werden, beträgt damit 75 %.

Bei der Eichung der Stehwelle sind wir auf ein interessantes Phänomen gestoßen. Bei der parametrischen Resonanz des Gitters werden nicht alle Atome eines Kondensats herausgeheizt. Diesen Effekt gilt es noch eingehender zu untersuchen.

Die numerische Simulation der Josephson-Oszillationen zeigt, daß die Abstimmung der relevanten Parameter sehr sorgfältig vorgenommen werden muß. Bei den Fallenparametern spielen der Abstand der Potentialtöpfe und die Höhe der Barriere eine wichtige Rolle. Ist die zu durchtunnelnde Potentialbarriere zu breit oder zu hoch, so werden die Tunnelzeiten zu groß. Beim Abstand  $d$  der Potentialtöpfe sind wir durch das Auflösungsvermögen der Abbildung limitiert.  $d$  darf eine Größe von  $5 \mu\text{m}$  nicht unterschreiten, damit das Doppelkondensat noch aufgelöst werden kann. Die Atomzahl des BECs sollte in der Größenordnung von  $N \sim 1000$  Atomen liegen. Die Parameter  $d$  und  $N$  bestimmen somit die Höhe der Tunnelbarriere zu  $V_0 = 0.11E_{\text{rec}}$ . Ihre Eichung muß besser sein als 5 %. Bei einer größeren Abweichung der Höhe der Potentialbarriere sieht man in der numerischen Simulation, daß keine Josephson-Oszillationen auftreten. Es stellt sich der Zustand des ma-

crsopic quantum self-trapping ein oder das Tunneln kommt nach einer halben Periode zum Erliegen. Die Tunneldynamik hängt kritisch von der Anfangsbesetzung des Doppelpotentials ab. Diese wird sowohl in der Simulation als auch im Experiment durch eine Verschiebung der Position der x-DT Dipolfalle erzeugt. Schon kleine Abweichungen von idealen Bedingungen verhindern das Tunneln.

Erste Messungen haben gezeigt, daß die mechanische Stabilität der relevanten optischen Teile zur Beobachtung der Josephson-Effekte unzureichend war. Für Kondensate mit zirka  $N = 2000$  Atomen betragen die Schwankungen der Atomzahlen 25 %. Die Standardabweichung der Position der Dipolfalle lag bei  $700 \text{ nm}$ . Das ist zu groß, wenn man bedenkt, daß zur Herstellung des asymmetrischen Doppelpotentials eine Positionsverschiebung der x-DT Falle von weniger  $200 \text{ nm}$  vorgenommen wird. Diese Schwierigkeiten haben uns dazu veranlasst, die Einstellung des Systems so vorzunehmen, daß die Größe des chemischen Potentials die Barrierenhöhe übersteigt. Für diesen Fall sind Oszillationen beobachtet worden, die allerdings nicht aufgrund einer Tunneldynamik auftreten. Wir haben gesehen, daß die relative Anfangsbesetzung mit Hilfe der Positionsänderung der x-DT Dipolfalle steuerbar ist und die Evolution der Anfangsbesetzung beobachtet werden kann. Die Schwankung der Anfangsbesetzung liegt bei  $\sim 15 \%$  und die Größe der Schwingungsperioden zeigt keine signifikanten Unterschiede. Diese Unsicherheiten machten eine Beobachtung der Josephson-Oszillationen unmöglich.

Konsequenterweise bestand der nächste Schritt darin, die mechanische Stabilität des Systems auf die beschriebene Weise zu erhöhen. Jetzt sind wir in die Lage die Position des x-DT auf  $70 \text{ nm}$  (Standardabweichung) zu stabilisieren. Die Reproduktion von Kondensaten mit 1400 Atomen mit einer Schwankung von weniger als 10 % ist somit möglich geworden. Zusätzlich haben wir die Phase der Stehwelle stabilisiert. Dazu wird Licht aus den Gitter erzeugenden Laserstrahlen ausgekoppelt und vor einem Spalt zur Interferenz gebracht. Die Intensität des Beugungsbildes wird dahinter mit einer Photodiode gemessen. Die Phase der Stehwelle wird auf das Signal der Photodiode aktiv stabilisiert und mit Hilfe von „RF-Phasenschiebern“ verändert. Diese sind in der Lage die Phase der Schallwelle im AOM zu steuern. Dank dieser Stabilisierung liegt die Position bei 90 % aller Bilder im Bereich eines Pixels auf dem CCD-Chip der Kamera.

## Ausblick

Gegen Ende dieser Arbeit sind die Josephson-Oszillationen sowie das self-trapping von Michael Albiez, Rudolf Gati und Jonas Fölling gemessen worden. Zur Zeit wird die genaue Auswertung der Daten vorgenommen. Sollte die Stabilität des Systems ausreichen, dann könnte in näherer Zukunft sogar der Einfluß der Fallenfrequenzen auf die maximale Amplitude der relativen Besetzung ermittelt werden. Sehr interessant wäre vor allem den  $\pi$ -phase-mode zu beobachten. Dazu muß die zeitgemittelte Phasendifferenz zwischen den Potentialtöpfen  $\pi$  betragen. Man könnte dann auch im Fall der gleichen Anfangsbesetzung eine Tunneldynamik feststellen; im Gegensatz zum zero-phase-mode.

Es ist vorstellbar, daß wir mit unserer experimentellen Apparatur die Dynamik getriebener Systeme untersuchen können. Eine sehr interessante Möglichkeit wäre beispielsweise die eingehendere Untersuchung des self-trapping-Zustands. Auf welcher Zeitskala bleibt dieser Zustand erhalten und wie kann er verändert werden? Von Salasnich [75] wird vorhergesagt, daß mit einer periodischen Variation der Höhe der Tunnelbarriere die Tunnelndynamik beeinflusst werden kann. Dieses Verhalten ist von der Frequenz  $\omega$ , mit der die Höhe der Tunnelbarriere oszilliert abhängig. Zunächst wird angenommen, daß das System Josephson-Oszillationen mit der Frequenz  $\omega_J$  ausführt. Unter der Bedingung der parametrischen Resonanz, das heißt, daß die Oszillation der Potentialhöhe das Doppelte von  $\omega_J$  beträgt, wird die Amplitude der relativen Besetzungsdifferenz zunehmen. Unter idealen Bedingungen kann sie die extremalen Werte  $\pm 1$  annehmen, was im ungestörten Zustand nicht möglich ist. Befindet sich das System im Zustand des self-trapping, oszilliert die Besetzungsdifferenz mit der Frequenz  $\omega_{ST}$  um einen von Null verschiedenen Wert. Ein sehr kleiner Teil der Atome bleibt ungefangen und kann durch die Barriere tunneln. Wenn die Barrierenhöhe sich periodisch mit  $\omega = 2\omega_{ST}$  ändert dann wird das self-trapping aufgehoben. Das System führt in diesem Fall normale Josephson-Oszillationen aus.



# Literaturverzeichnis

- [1] B. D. Josephson. Possible new effects in superconductive tunneling. *Physics Letters*, 1:251, 1962.
- [2] Anderson P.W. and Rowell J. W. Probable observation of the Josephson superconducting tunnel effect. *Physical Review Letters*, 10:230, 1963.
- [3] F. London. Macroscopic interpretation of superconductivity. *Proc. Roy. Soc.*, 152:23, 1935.
- [4] V. L. Ginzburg and L. G. Landau. On the theory of superconductivity. *Zh. Eksp. Teor. Phys.*, 20:1064, 1950.
- [5] J. R. Schrieffer, J. Bardeen, L. N. Cooper. Theory of Superconductivity. *Physical Review*, 108, December 1957.
- [6] A. Barone and G. Paterno. *Physics and Applications of the Josephson Effect*. Wiley, New York, 1982.
- [7] Yu. A. Pashkin, Y. Nakamura and J. S. Tsai. Coherent control of macroscopic quantum states in a single-Cooper-pair box. *Nature*, 398:786, 1999.
- [8] R. B. Leighton, R. P. Feynman and M. Sands. *Lectures on Physics*, volume 3, chapter 21. Addison-Wesley, 1965.
- [9] R. E. Packard, J. C. Davis. Superfluid  $^3\text{He}$  Josephson weak links. *Reviews of Modern Physics*, 74:741, July 2002.
- [10] S.N. Bose. Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese. *Z.Phys.*, 26:178, 1924.
- [11] A. Einstein. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, page 261, 1924.
- [12] M. Anderson, J. Ensher, M. Matthews, C. Wieman, and E. Cornell. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, 269:198, 1995.
- [13] J.R. Ensher, D.S. Jin, M.R. Matthews, C.E. Wieman, and E.A. Cornell. Bose-Einstein condensation in a dilute gas: Measurement of energy and ground-state occupation. *Physical Review Letters*, 77:4984, 1996.

- [14] D.S. Jin, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, and E.A. Cornell. Collective excitations of a Bose-Einstein condensate in a dilute gas. *Physical Review Letters*, 77:420, 1996.
- [15] M.-O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.M. Kurn, D.S. Durfee, C.G. Townsend, and W. Ketterle. Collective excitations of a Bose-Einstein condensate in a magnetic trap. *Physical Review Letters*, 77:988, 1996.
- [16] M.R. Andrews, D.M. Kurn, H.-J. Miesner, D.S. Durfee, C.G. Townsend, S. Inouye, and W. Ketterle. Propagation of sound in a Bose-Einstein condensate. *Physical Review Letters*, 79:533, 1997.
- [17] M.R. Andrews, C.G. Townsend, H.-J. Miesner, D.S. Durfee, D.M. Kurn, and W. Ketterle. Observation of interference between two Bose-Einstein condensates. *Science*, 275:637, 1997.
- [18] B.P. Anderson and M. Kasevich. Macroscopic quantum interference from atomic tunnel arrays. *Science*, 282:1686, 1998.
- [19] M.-O. Mewes, Andrews M.R., D.M. Kurn, D.S. Durfee, C.G. Townsend, and W. Ketterle. Output coupler for Bose-Einstein condensed atoms. *Physical Review Letters*, 78:582, 1997.
- [20] E.W. Hagley, L. Deng, M. Kozuma, J. Wen, K. Helmerson, S.L. Rolston, and W.D. Phillips. A well-collimated quasi-continuous atom laser. *Science*, 283:1706, 1999.
- [21] I. Bloch, T.W. Hänsch, and T. Esslinger. Atom laser with a cw output coupler. *Physical Review Letters*, 82:3008, 1999.
- [22] J. Kronjäger M. Kottke S. van Staa J.J. Arlt K. Bongs H. Schmaljohann, M. Erhard and K. Sengstock. Dynamics of F=2 Spinor Bose-Einstein Condensates. *Physical Review Letters*, 92:40402, 2004.
- [23] J. Herbig, T. Krämer, M. Mark, T. Weber, C. Chin, H.-C. Nägerl, and R. Grimm. Preparation of a Pure Molecular Quantum Gas. *Science*, 301:1510, 2003.
- [24] B. DeMarco and D.S. Jin. Onset of Fermi Degeneracy in a Trapped Atomic Gas. *Science*, 285:1703, 1999.
- [25] M. Inguscio and C. Wieman S. Stringari, editors. *Bose-Einstein condensation in atomic gases*. IOS Press, Amsterdam, Amsterdam, 1999.
- [26] F. Dalfovo and S. Stringari. Bosons in anisotropic traps: Ground states and vortices. *Physical Review A*, 53:2477, 1996.

- [27] M.J. Steel and W. Zhang. Bloch function description of a Bose-Einstein condensate in a finite optical lattice. *arXiv:cond-mat/9810284*, 1998.
- [28] M. Albiez M. Taglieber P. Treutlein K.-P. Marzlin B. Eiermann, Th. Anker and M. K. Oberthaler. Bright Bose-Einstein Gap Solitons of Atoms with Repulsive Interaction. *Physical Review Letters*, 92:230401, 2004.
- [29] P.S. Jessen and I.H. Deutsch. Optical lattices. *Adv. At. Mol. Opt. Phys.*, 37:95, 1996.
- [30] M. Greiner, I. Bloch, O. Mandel, T.W. Hänsch, and T. Esslinger. Bose-Einstein condensates in 1d- and 2d optical lattices. *Applied Physics B*, B73:769, 2001.
- [31] O. Morsch, J.H. Müller, M. Cristiani, D. Ciampini, and E. Arimondo. Bloch oscillations and mean-field effects of Bose-Einstein condensates in 1-d optical lattices. *Physical Review Letters*, 87:140402, 2001.
- [32] M. Ben Dahan, E. Peik, J. Reichel, Y. Castin, and C. Salomon. Bloch oscillations of atoms in an optical potential. *Physical Review Letters*, 76(24):4508–11, June 1996.
- [33] S.R. Wilkinson, C.F. Bharucha, K.W. Madison, Q. Niu, and M.G. Raizen. Observation of atomic Wannier-Stark ladders in an accelerating optical potential. *Physical Review Letters*, 76:4512, 1996.
- [34] B. Eiermann, P. Treutlein, Th. Anker, M. Albiez, M. Taglieber, K.-P. Marzlin, and M.K. Oberthaler. Dispersion management for atomic matter waves. *Physical Review Letters*, 91:060402, 2003.
- [35] T. D. Holstein. Polaron motion. I. Molecular-crystal model.
- [36] F.S. Cataliotti, S. Burger, C. Fort, P. Maddaloni, F. Minardi, A. Trombettoni, A. Smerzi, and M. Ingusio. Josephson junction arrays with Bose-Einstein condensates. *Science*, 293:843, 2001.
- [37] A. Trombettoni and A. Smerzi. Discrete solitons and breathers with dilute Bose-Einstein condensates. *Physical Review Letters*, 86:2353, 2001.
- [38] S. Hunsmann R. Gati B. Eiermann A. Trombettoni Th. Anker, M. Albiez and M.K. Oberthaler. Macroscopic Quantum Self-Trapping for atoms. *submitted to Physical Review Letters*.
- [39] K. Davis, M.-O. Mewes, M. Andrews, N. van Druten, N. Durfee, D. Kurn, and W. Ketterle. Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms. *Physical Review Letters*, 75:3969, 1995.

- [40] W. Ketterle, D.S. Durfee, and D.M. Stamper-Kurn. Making, probing and understanding Bose-Einstein condensates. In M. Inguscio, S. Stringari, and C. Wieman, editors, *Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases*, Amsterdam: IOS Press, 1999. Società Italiana di Fisica.
- [41] F. Dalfovo and S. Giorgini. Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases. *Review of Modern Physics*, 71:463, 1999.
- [42] C.J. Pethick and H. Smith. *Bose-Einstein condensation in dilute gases*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2002.
- [43] A. Einstein. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases: Zweite Abhandlung. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, page 18ff., 1925.
- [44] E.P. Gross. Structure of a quantized vortex in boson systems. *Nuovo Cimento*, 20:454, 1961.
- [45] E.P. Gross. Hydrodynamics of a superfluid condensate. *J. Math. Phys.*, 4:195, 1963.
- [46] L.P. Pitaevskii. Vortex lines in an imperfect Bose gas. *Sov. Phys. JETP*, 13:451, 1961.
- [47] E. Tiesinga, B.J. Verhaar, and H.T.C. Stoof. Threshold and resonance phenomena in ultracold groundstate collisions. *Physical Review A*, 47:4114, 1993.
- [48] S. Inouye, M.R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Miesner, D.M. Stamper-Kurn, and W. Ketterle. Observation of Feshbach resonances in a Bose-Einstein condensate. *Nature*, 392:151, 1998.
- [49] E.A. Donley, N.R. Claussen, S.L. Cornish, J.L. Roberts, E.A. Cornell, and C.E. Wieman. Dynamics of collapsing and exploding Bose-Einstein condensates. *Journal of research of the National Institute of standards and Technology*, 412:295, 2001.
- [50] B. Eiermann. *Kohärente nichtlineare Materiewellendynamik - Helle atomare Solitonen* -. PhD thesis, Universität Konstanz, 2004.
- [51] M. Taglieber. Helle atomare gap-solitonen. Diplomarbeit, Universität Konstanz, 2003.
- [52] M. Edwards and K. Burnett. Numerical solution of the nonlinear Schrödinger equation for small samples of trapped neutral atoms. *Physical Review A*, 51:1382, 1995.
- [53] G. Baym and C.J. Pethick. Ground state properties of magnetically trapped Bose-condensed rubidium gas. *Physical Review Letters*, 76(1):6, 1996.



- [54] N. N. Bogoliubov. On the theory of superfluidity. *J. Phys. (Moscow)*, 11:23, 1947.
- [55] L.P. Pitaevskii and S. Stringari. *Bose-Einstein condensation*. Oxford University Press, Oxford, 2003.
- [56] C. Menotti and S. Stringari. Collective oscillations of a one-dimensional trapped Bose-Einstein gas. *Physical Review A*, 66:043610, 2002.
- [57] S. Stringari. Collective excitations of a trapped Bose-condensed gas. *Physical Review Letters*, 77:2360, 1996.
- [58] H. Ibach and H. Lüth. *Festkörperphysik*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 4th edition, 1995.
- [59] S. Giovanazzi R. Shenoy A. Smerzi, S. Fantoni. Quantum coherent atomic tunneling between two trapped Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 79:4950, 1997.
- [60] S. Fantoni S. Raghavan, A. Smerzi and S. R. Shenoy. Coherent oscillations between two weakly coupled Bose-Einstein condensates: Josephson effects,  $\pi$  oscillations, and macroscopic quantum self-trapping. *Physical Review A*, 59, 1999.
- [61] S. Fantoni S. R. Shenoy I. Marino, S. Raghavan and A. Smerzi. Bose-condensate tunneling dynamics: Momentum-shortened pendulum with damping. *Physical Review A*, 60:487, 1999.
- [62] C.M. de Sterke and J.E. Sipe. Application of the split operator fourier transform method to the solution of the nonlinear schrödinger equation. *AIP Conference Proceedings*, 160:269, 1986.
- [63] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe. *Quantenmechanik*. de Gruyter, Berlin, 1999.
- [64] F. Schwabl. *Quantenmechanik*. Springer, Berlin, 5th edition, 1998.
- [65] M.L. Chiofalo, S. Succi, and M.P. Tosi. Ground state of trapped interacting Bose-Einstein condensates by an explicit imaginary-time algorithm. *Physical Review E*, 62:7438, 2000.
- [66] L. Salasnich, A. Parola, and L. Reatto. Effective wave equations for the dynamics of cigar-shaped and disk-shaped Bose condensates. *Physical Review A*, 65:043614, 2002.
- [67] J. E. Williams. Optimal conditions for observing Josephson oscillations in a double-well Bose-Einstein condensate. *Physical Review A*, 64:013610, 2001.

- [68] K. Dieckmann, R.J.C. Spreeuw, M. Weidemüller, and J.T.M Walraven. Two-dimensional magneto-optical trap as a source of slow atoms. *Physical Review A*, 58:3891, 1998.
- [69] E. Majorana. Atomi orientati in campo magnetico variabile. *Nuovo Cimento*, 9:43, 1932.
- [70] J. Schmiedmayer. Guiding and trapping a neutral atom on a wire. *Physical Review A*, 52, 1995.
- [71] R. Grimm and M. Weidemüller. Optical dipole traps for neutral atoms. *Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics*, 42:95, 2000.
- [72] J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, New York, 1962.
- [73] L. Landau und L. Lifschitz. *Mechanik*. Akademie-Verlag, Berlin, 1964.
- [74] J. M. Cowley. *Diffraction Physics*. North-Holland, Amsterdam, 1990.
- [75] L. Salasnich. Parametric Resonant Phenomena in Bose-Einstein Condensates: Breaking of Macroscopic Quantum Self-Trapping. *cond-mat/0208221*, 2002.

# Danksagung

Ich möchte mich bei allen bedanken, die mir diese Arbeit ermöglicht haben:

Prof. Markus K. Oberthaler danke ich für die Aufnahme in seine Arbeitsgruppe und die Möglichkeit an diesem sehr interessanten Experiment mitarbeiten zu können.

Prof. J. Schmiedmayer danke ich für die Begutachtung meiner Arbeit.

Ich danke Bernd Eiermann, Michael Albiez, Rudolf Gati, Thomas Anker, Jonas Fölling und Matteo Cristiani für die lustige Atmosphäre im Labor. Et wor nit schlääch...

Ralf Stützle, Thomas Hörner und Igor Mourachko danke ich für die angenehme Gruppenatmosphäre.

Lisa, ich danke dir....

Meinen Eltern danke ich für die finanzielle Unterstützung, ohne die dieses Studium noch länger gedauert hätte.

## Erklärung:

Ich versichere, daß ich diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Heidelberg, den 28.10.2004

.....

(Unterschrift)