

Nichtlineare Materiewellenoptik

Solitonen im Bose-Einstein-Kondensat

BERND EIERMANN | MARKUS K. OBERTHALER

Bose-Einstein-Kondensate sind perfekte Quantensysteme für das Studium der Dynamik von Wellenpaketen. Im optischen Gitter wird die effektive Masse der Wolke aus ultrakalten Atomen direkt manipulierbar. Damit lässt sich das Zerfließen eines Wellenpakets zeitlich umkehren. Sogar helle Solitonen sind erzeugbar.

Seit Anfang des 20. Jahrhunderts sind die Regeln bekannt, die das Verhalten von Materie auf atomarer Größenskala beschreiben. Es sind die Gesetze der Quantenmechanik. Die Eigenschaften der Teilchen sind nicht mehr durch Größen wie Ort und Impuls charakterisiert, sondern werden durch die Wellenfunktion ψ festgelegt. Den ersten Kontakt mit dem noch unbekanntem Wesen der Wellenfunktion hat man in der Regel im Chemieunterricht. Dort wird die Aufenthaltswahrscheinlichkeit von Elektronen, also das Betragsquadrat der Wellenfunktion, durch Orbitale veranschaulicht. Doch wie misst man diese Aufenthaltswahrscheinlichkeit?

In einem Gedankenexperiment realisiert man dazu *ein* Elektron in einem bestimmten Orbital. Misst man nun, wo sich das Elektron befindet, so wird man es an einem ganz bestimmten Ort nachweisen. Wiederholt man das Experiment, wird man das Elektron jedoch an einer anderen Position finden. Bei vielen Wiederholungen zeichnen die gemessenen Elektronenpositionen schließlich die Form des Orbitals nach: Die Häufigkeit, das Elektron an einer bestimmten Stelle zu finden, entspricht also direkt seiner Aufenthaltswahrscheinlichkeit. Allerdings sind die atomaren Orbitale von der Natur vorgegeben und nur sehr schwer veränderbar. Ihre Ausdehnung ist zudem nur den modernsten Methoden der Rastertunnel- und Elektronenmikroskopie zugänglich. Deshalb wählt man für Experimente zur Veranschaulichung von Quanteneffekten und Quantendynamik ein anderes System. Es soll die volle Kontrolle der Dynamik

möglich und zugleich einfach mit einem Lichtmikroskop beobachtbar sein.

Die Voraussetzungen für ein solches System wurden mit der ersten experimentellen Realisierung eines Bose-Einstein-Kondensats (Bose-Einstein Condensate, BEC) im Jahre 1995 [2] geschaffen. Am BEC lassen sich die Gesetze der Quantenmechanik auf makroskopischer Größenskala mit einer einfachen Linse untersuchen. Außerdem befinden sich alle Atome eines Kondensats im selben Zustand, dem Grundzustand des physikalischen Systems. Damit ist die Realisierung eines einzigen Kondensats äquivalent zu der Durchführung vieler einzelner Experimente. Diese Tatsache erlaubt es, die Atome zu „fotografieren“ und so das Betragsquadrat der Wellenfunktion direkt räumlich zu vermessen [3]. Diese Experimente ermöglichen es auch, die Dynamik, also die zeitliche Änderung der Wellenfunktion, zu manipulieren. Das geschieht durch das kontrollierte Ein- und Ausschalten geeigneter Potentiale.

Das Zerfließen von Materiewellen

Worin unterscheidet sich aber die Dynamik „normaler“ klassischer Teilchen von der Dynamik quantenmechanischer Teilchenwellen? Ein schönes Beispiel ist das Zerfließen eines freien quantenmechanischen Wellenpakets durch die Dispersion. In einem Gedankenexperiment hierzu präpariert man ein freies Punktteilchen am Ort x mit kinetischer Energie E . Die klassische Teilchengeschwindigkeit v ergibt sich formal durch die Ableitung der kinetischen Energie

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (1)$$

nach dem Impuls:

$$v = \frac{dE}{dp} = \frac{p}{m} \quad (2)$$

Dementsprechend ist die Position des Teilchens für alle Zeiten genau festgelegt.

Quantenmechanisch ist dieses Experiment nicht möglich. In der Quantenwelt ändert sich nicht die grundlegende Energie-Impuls-Beziehung $E = p^2/(2m)$, sondern die Anfangsbedingungen sind nicht erfüllbar. Da die Quantenmechanik Teilchen als Wellen beschreibt, ergibt sich, dass zu einem im Ortsintervall Δx lokalisierten Teilchen – das Wellenpaket – eine entsprechende Impulsunschärfe gehört. Sie

INTERNET

Materiewellenoptik an der Universität Heidelberg
www.matterwave.de

BEC wunderbar erklärt, mit schönen Applets zum Spielen
www.colorado.edu/physics/2000/index.pl

ist durch die Heisenbergsche Unschärferelation $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$ gegeben. Das heißt, das ursprüngliche Wellenpaket breitet sich nicht mit einer einzigen Geschwindigkeit aus, sondern mit einer Geschwindigkeitsverteilung $\Delta v = \Delta p/m$. Damit kann man verstehen, dass das Wellenpaket im Laufe der Zeit breiter wird.

Abbildung 1 demonstriert ein Experiment zur freien Expansion eines Wellenpaketes in einer Dimension mit einem Bose-Einstein-Kondensat. Das BEC bildet ein räumlich lokalisiertes, kohärentes Wellenpaket, das aus verschiedenen Impulsen besteht. Analog zur Optik stellt das Bild die Impulse durch verschiedene Farben dar, die der De-Broglie-Wellenlänge $\lambda_{dB} = h/p$ entsprechen (h : Plancksches Wirkungsquantum). Die verschiedenen Geschwindigkeiten dieser Impulse führen schließlich zum Zerfließen der Materiewelle mit fortschreitender Zeit. Das belegen eindrücklich die experimentellen Messungen (Abbildung 1b) [3]. Wer genau hinschaut, bemerkt auch, dass die Form der Wellenpakete nicht der eigentlich erwarteten Gauß-Kurve entspricht, sondern eher einer Parabel. Das ist eine Folge der Wechselwirkung zwischen den Atomen im kalten Quantengas.

Manipulation der Dispersion

Man könnte nun meinen, dies sei schon das Ende der Geschichte: Freie Wellenpakete zerfließen, da sich die konstituierenden Impulsklassen mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegen. Es zeigt sich aber, dass die Quantenmechanik wesentlich reichhaltiger sein kann, da sich die Dynamik der Teilchenwellen auf eine „einfache“ Art und Weise manipulieren lässt. Wie dies möglich ist, kann eine Analogie zur Lichtoptik veranschaulichen.

Sonnenlicht trennt sich beim Durchgang durch ein Glasprisma in seine spektralen Bestandteile. Das ist vergleichbar mit dem quantenmechanischen Wellenpaket im freien Raum (Abbildung 1). In beiden Fällen ist die Energieabhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen entscheidend. Für den Fall des Lichts ist die Energie-Impuls-Beziehung durch $E = c \cdot p/n(v)$ gegeben, wobei n der Brechungsindex und v die optische Frequenz ist. Daraus ergibt sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit

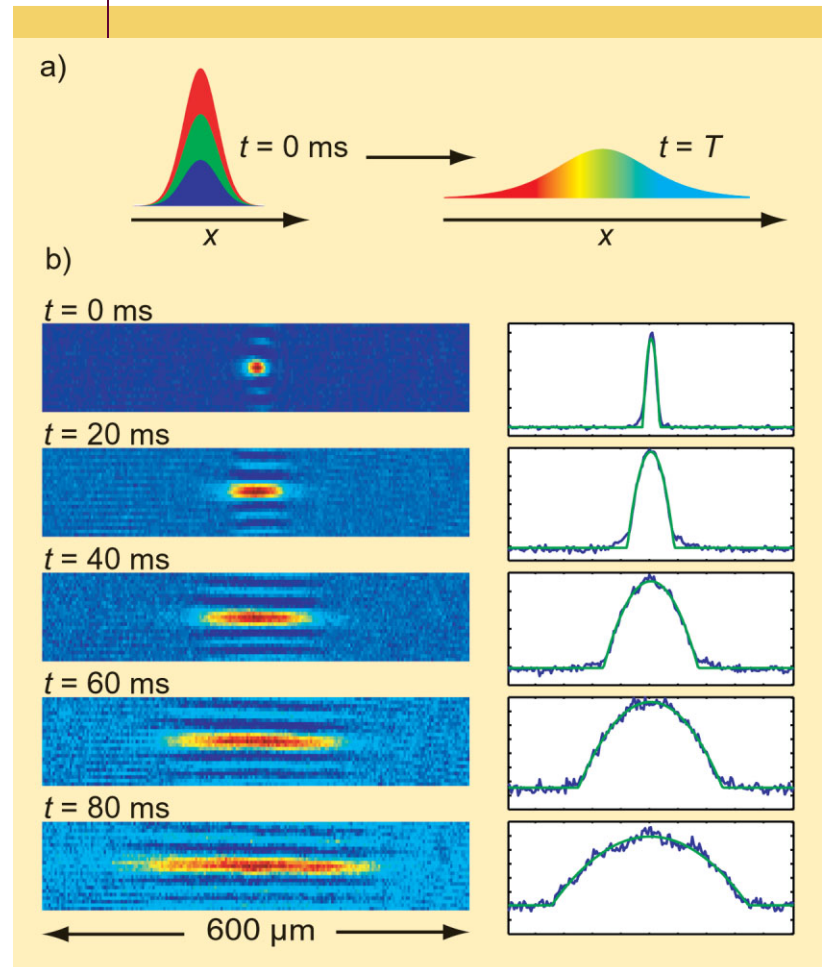
$$v = \frac{dE}{dp} = \frac{c}{n(v)} \quad (3)$$

Folglich ist diese grundlegende Energie-Impuls-Beziehung über den Brechungsindex $n(v)$ einstellbar, also über die Eigenschaften des optischen Materials. So wird das Zerfließen des Wellenpaketes direkt steuerbar.

Eine ähnliche Kontrolle kann man bei Materiewellen erreichen. Dazu muss man „einfach“ die Dispersionsrelation (1) ändern. Mit anderen Worten: Man muss sich von der Vorstellung trennen, dass damit die Beziehung $v = p/m$ für massive Teilchen universell gültig ist. Doch wie ändert man die Dispersionsrelation für massive Teilchen?

Dazu hilft ein Blick in die Lehrbücher der Festkörperphysik [4]. Dort wird ausführlich beschrieben, wie sich Elek-

ABB. 1 | BOSE-EINSTEIN-KONDENSAT ALS WELLENPAKET

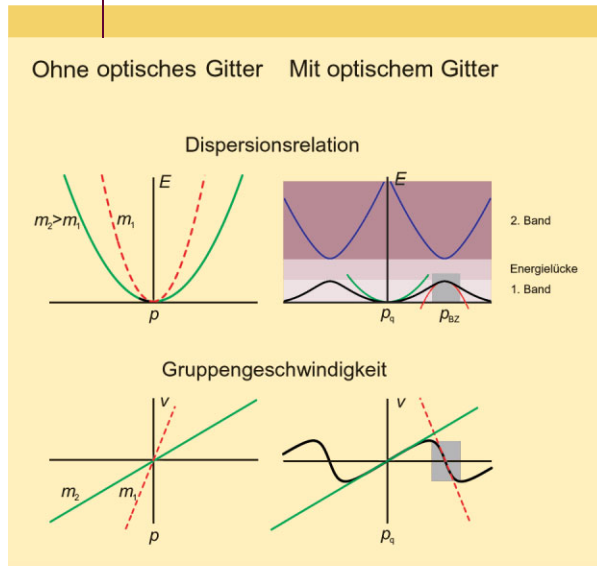


Freie Expansion eines Wellenpaketes in einer Dimension. a) Farbkodierung der Impulsverteilung im Bose-Einstein-Kondensat (BEC) nach ihrer De-Broglie-Wellenlänge: rot entspricht kurzen, blau langen Wellenlängen. b) Ein BEC aus etwa 20 000 ultrakalten Rubidium-Atomen zerfließt, rechts jeweils die Form seines Wellenpakets: In den Falschfarbenbildern entspricht rot der höchsten Atomdichte [3].

tronen im Festkörper bewegen. Dabei stellt man fest, dass die De-Broglie-Wellenlänge der beweglichen Elektronen in derselben Größenordnung liegt, wie die Abstände zwischen den Ionenrümpfen des Kristalls. Die Bewegung der Elektronen muss dementsprechend als Vielfachstreuproblem behandelt werden. Es zeigt sich aber, dass die Beschreibung wesentlich vereinfacht werden kann, wenn man ganz bestimmte Wellenfelder heranzieht: Diese Bloch-Zustände haben die gleiche Periodizität wie das Kristallgitter. Sie zeichnen sich durch eine sehr einfache Zeitentwicklung aus. Analog zu den freien Teilchen breiten sie sich gemäß der ersten Ableitung einer entsprechenden Dispersionsrelation aus (Abbildung 2). Diese enthält jetzt die Information über die Details des periodischen Potentials.

Der einfachste Fall ist ein sinusförmiges Potential mit Periode d . In diesem Fall ergibt sich die Dispersionsrelation, wie sie in Abbildung 2 rechts dargestellt ist. Offensichtlich ist die Energie-Impuls-Beziehung nicht mehr durch eine ein-

ABB. 2 | ENERGIE UND IMPULS



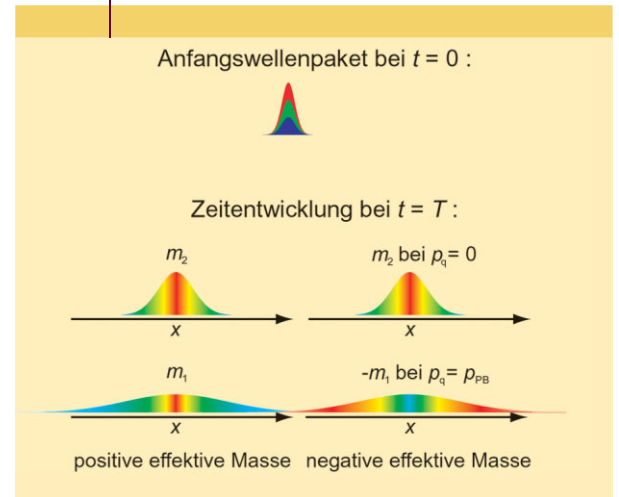
Energie-Impuls-Beziehung für ein freies Teilchen (links) und eines im periodischen Potential (rechts). Ist die Impulsbreite des Wellenpakets schmal, dann ist die räumliche Ausdehnung viel größer als die Periodizität des Potentials. In diesem Fall entspricht seine Ausbreitung einer parabolischen Näherung (grün) und ist durch eine effektive Masse beschreibbar.

fache Parabel beschreibbar wie im Fall eines freien Teilchens (Abbildung 2 links). Sie ist jetzt eine periodische Funktion im Impulsraum mit einer Periodizität von $2p_{BZ} = \hbar 2\pi/d$ (BZ steht für die erste Brillouin-Zone des Kristallgitters). Die Beschreibung der Ausbreitung kann weiter vereinfacht werden, wenn das Anfangswellenpaket wesentlich größer ist als die Periodizität des Potentials. Dies impliziert über die Heisenbergsche Unschärferelation, dass die Impulsbreite sehr schmal wird: So kann die Dispersionsrelation lokal durch eine Parabel angenähert werden (grüne Kurve in Abbildung 2 rechts). Ein solches Wellenpaket bewegt sich nun mit einer Gruppengeschwindigkeit, die der Steigung der Dispersionsrelation entspricht. Dabei zerfließt es wie ein freies Teilchen mit einer modifizierten Masse m . Diese wird durch die Krümmung der Dispersionsrelation ausgedrückt.

Der experimentelle Schlüssel liegt demnach in der Herstellung eines periodischen Potentials für Materiewellen. Dieses kann für ultrakalte Atome sehr leicht unter Verwendung von zwei gegenläufigen kohärenten Laserstrahlen geeigneter Frequenz und Intensität erzeugt werden (siehe „Optische Potentiale“, S. 189). Ein solches Potential ist sinusförmig moduliert und wird optisches Gitter genannt. Die genaue Form der Dispersionsrelation ist – wie in der Festkörperphysik – abhängig von der Tiefe und Periode des Potentials. Abbildung 2 zeigt ein optisches Gitter, wie es für unsere Experimente typisch ist.

Man stellt nun fest, dass die Energie der Atome nicht mehr alle Werte annehmen kann. Das Energiespektrum zerfällt in erlaubte und verbotene Bereiche. Diese Energiebänder und Energielücken (Gap) kennt man aus der Halblei-

ABB. 3 | WELLENPAKET IM OPTISCHEN GITTER



Ein BEC-Wellenpaket zerfließt, egal ob es eine positive oder negative effektive Masse hat. Beide Regimes unterscheiden sich jedoch nach der Expansion (unten) in der Verteilung der De-Broglie-Wellen: Bei normaler Masse formen die hochenergetischen De-Broglie-Wellen (blau) den Rand des Wellenpakets (links), im negativen Massenregime (rechts) dagegen die niederenergetischen De-Broglie-Wellen (rot).

terphysik. Zu einem gegebenen Impuls p_q gibt es nun mehrere mögliche Energien, die in getrennten Bändern liegen. Die Tiefe des periodischen Potentials ist in unseren Experimenten allerdings so klein, dass der Energieverlauf in den höheren Bändern nahezu identisch mit dem eines freien Teilchens ist. Folglich ist das untere Band der interessanteste Bereich, da es andersartige Eigenschaften aufweist. Auf dieses beschränken wir uns im Folgenden.

Man erkennt, dass sich die Dispersionsrelationen vor allem dort unterscheiden, wo sich unterstes und erstes angeregtes Band am nächsten kommen. In der Sprache der Festkörperphysik ist dies der Rand der Brillouin-Zone beim Impuls

$$p_{BZ} = \frac{\hbar}{2d}, \quad (4)$$

\hbar ist wieder das Plancksche Wirkungsquantum, d die Periodizität des Potentials. In Abbildung 2 kann man rechts besondere Bereiche im Impulsraum erkennen, die grau hervorgehoben sind. Dort erhöht eine Energiezufuhr die Geschwindigkeit der Teilchen nicht, sondern senkt sie im Gegenteil. Diese Eigenschaft kann man auch beschreiben, indem man die normalerweise als konstante Größe angesehene Masse der Atome durch eine effektive negative Masse ersetzt. Darüber erlauben die periodischen Potentiale es nun, gezielt die Energie-Impuls-Beziehung und somit die Wellendynamik zu beeinflussen.

In Abbildung 3 kann man erkennen, dass die Wellenpakete aus ultrakalten Atomen expandieren, egal welches Vorzeichen ihre effektive Masse trägt. Dabei wächst übrigens die Zerfließgeschwindigkeit umso stärker, je kleiner der Betrag der effektiven Masse ist. Der Unterschied der Expan-

sion in den beiden Regimes wird offensichtlich, wenn man die Verteilung der De-Broglie-Wellenlängen innerhalb des Pakets in Abbildung 3 betrachtet: Bei normaler Masse bilden die hochenergetischen De-Broglie-Wellen (blau) den Rand des Wellenpakets, im negativen Massenregime hingegen die niederenergetischen De-Broglie-Wellen (rot).

Dispersionsmanagement

Wie sehen nun die Ergebnisse von Experimenten mit Bose-Einstein-Kondensaten aus? Die Herstellung eines BEC wurde in „Physik in unserer Zeit“ bereits detailliert vorgestellt [3], einen guten Überblick bietet auch [5].

Bisher haben wir diskutiert, wie sich ein Wellenpaket im periodischen Potential in den zwei Spezialfällen ausbreitet, in denen der mittlere Impuls $p_q = 0$ oder $p_q = p_{BZ}$ ist. Im Experiment lässt sich der mittlere Impuls p der ultrakalten Atome sehr leicht verändern. Dazu kann man über elektromagnetische Felder äußere Kräfte wirken lassen. Oder man legt Scheinkräfte an, indem man die Potentiale beschleunigt (siehe „Optische Potentiale“). Man muss nur darauf achten, dass die auftretenden Kräfte klein genug bleiben. Sonst würden sie die Wellenpakete nichtadiabatisch in höhere Bänder anregen. Die Atome könnten dann die Energielücke überwinden, also quantenmechanisch gesehen durch sie hindurch tunneln. Dadurch würden sie sich einer gezielten Manipulation entziehen.

Dem Experimentatoren stellt sich nun eine grundsätzliche Frage: Kann es ihm gelingen, eine negative effektive

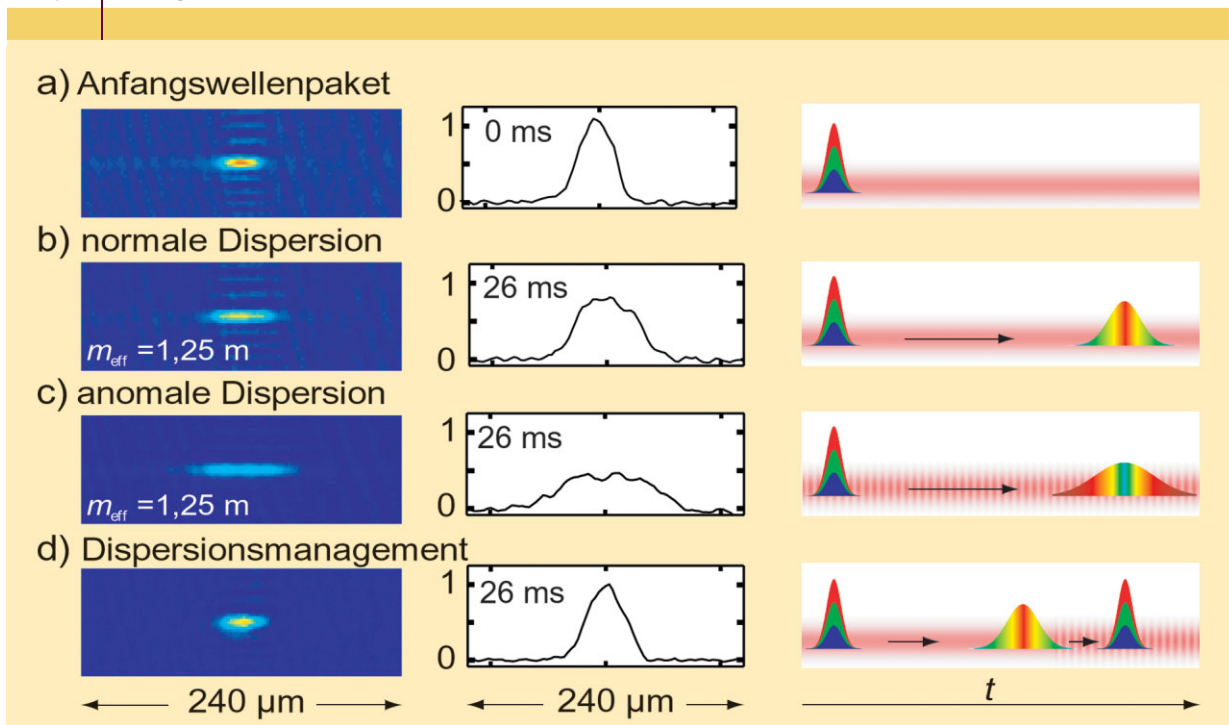
Masse eindeutig nachzuweisen? Das Wellenpaket zerfließt ja immer, ganz unabhängig von dem Vorzeichen der Masse. Also ist die Beobachtung des Zerfließens allein kein eindeutiges Merkmal. Der Nachweis ist trotzdem möglich. Das dazu nötige Experiment wird sofort einsichtig, wenn man die formale Zeitentwicklung der Wellenpakete betrachtet. Ihre Dynamik wird durch die Schrödinger-Gleichung beschrieben:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x,t) = - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x,t). \quad (5)$$

Diese Gleichung zeigt einen entscheidenden Zusammenhang: Die Dynamik eines Wellenpakets mit negativer Masse ist äquivalent zu seiner Ausbreitung mit positiver Masse, aber mit rückwärts laufender Zeit ($t \rightarrow -t$). Die Konsequenz ist für ein Wellenpaket, das eine bestimmte Zeit lang mit positiver Masse zerlaufen ist, verblüffend: Mit Hilfe einer negativen effektiven Masse kann es so wieder in seine Ausgangsgröße komprimiert werden. Der Effekt erinnert fast an einen Film, der rückwärts abläuft.

Die experimentellen Ergebnisse sind in Abbildung 4 zusammengefasst. Links ist wieder das BEC zu sehen, in der Mitte seine Form als Wellenpaket. Rechts ist sein Weg im Wellenleiter (roter Balken) dargestellt, der aus einem Laserstrahl besteht. Er verhindert, dass die Atome des BEC im Schwerfeld der Erde fallen und zwingt sie, sich alle entlang einer erwünschten Richtung zu bewegen. Abbildung 4a zeigt das Kondensat in der dreidimensionalen optischen Falle zum Startzeitpunkt. b) Kondensat mit positiver effektiver Masse nach 26 ms Expansionszeit, c) eines mit negativer effektiver Masse ebenfalls nach 26 ms. d) Dieses BEC expandierte 18 ms lang mit positiver effektiver Masse und wurde dann mit negativer effektiver Masse in 8 ms wieder komprimiert.

ABB. 4 | ZEITUMKEHR



a) Kondensat in der dreidimensionalen optischen Falle zum Startzeitpunkt. b) Kondensat mit positiver effektiver Masse nach 26 ms Expansionszeit, c) eines mit negativer effektiver Masse ebenfalls nach 26 ms. d) Dieses BEC expandierte 18 ms lang mit positiver effektiver Masse und wurde dann mit negativer effektiver Masse in 8 ms wieder komprimiert.

le zu Beginn des Experiments. Das läuft nun los, und die beiden folgenden Abbildungen 4b und 4c zeigen zwei Kondensate, die jeweils 26 ms lang expandiert sind. Allerdings unterscheiden sich die Beiden. In Abbildung 4b sieht man ein Kondensat mit positiver effektiver Masse, das im Bereich normaler Dispersion um $p_q = 0$ expandiert. Das BEC in Abbildung 4c besitzt dagegen eine negative effektive Masse. Präpariert haben wir es mit Scheinkräften am Rand der Brillouin-Zone $p_q = p_{BZ}$. Die Scheinkräfte erzeugten wir durch Beschleunigen des periodischen Potentials (siehe „Optische Potentiale“). Die beiden Schnappschüsse nach 26 ms Laufzeit unterscheiden sich geringfügig, denn eine Materiewelle ist etwas breiter expandiert als die andere. Das liegt allerdings nur daran, dass die Masse am Rand der Brillouin-Zone einen kleineren Absolutwert hat (Abbildung 2).

Für den eindeutigen Nachweis der negativen Masse haben wir ein Wellenpaket mit positiver Masse zunächst für 18 ms zerfließen lassen und anschließend für 8 ms mit negativer Masse komprimiert. Dabei schalten wir einfach durch eine Beschleunigung des optischen Gitters von der positiven in die negative effektive Masse um. Wie Abbildung 4d zeigt, erreicht das Paket so tatsächlich wieder seine Ausgangsgröße. Diese scheinbare Inversion der Zeit ist ein direkter Beweis für eine negative effektive Masse. Warum komprimiert aber die Atomwolke in nur 8 ms, während sie zuvor 18 ms für die Expansion brauchte? Das liegt an der nun negativen effektiven Masse: Weil diese im Betrag kleiner ist als die „natürliche“ Masse der beteiligten Rubidium-Atome, zieht sich das BEC schneller zusammen. Die Mess-

zeit von jeweils insgesamt 26 ms wurde in unserem Experiment durch die Länge des Wellenleiters vorgegeben.

Mit diesem experimentellen Werkzeug versehen, kann man nun ein anderes nichtlineares Wellenphänomen beobachten, das wohlbekannt ist.

Nichtlineare Dynamik und Solitonen

Bei Bose-Einstein-Kondensaten sprechen Physiker in der Literatur meist von der Kondensation schwach wechselwirkender atomarer Gase. Das vermittelt den Eindruck, als sei die Wechselwirkung zwischen den Atomen für ihre Dynamik von untergeordneter Bedeutung: Sie ist es mitnichten! In aller Regel ist sogar das Gegenteil der Fall. Bei den meisten Experimenten, die bisher weltweit durchgeführt wurden, dominiert die Wechselwirkung die Dynamik sehr stark. In diesen Fällen kann das bereits diskutierte Zerfließen des Wellenpakets durch Dispersion vollkommen vernachlässigt werden.

Diese Situation steht jedoch in keinem Widerspruch zur Bezeichnung „schwach wechselwirkend“. Die schwache Wechselwirkung bezieht sich nur auf die Tatsache, dass das Kondensat als Ganzes noch durch eine einzige, makroskopische Wellenfunktion beschrieben werden kann. Anders ausgedrückt: Am absoluten Temperaturnullpunkt befinden sich nahezu alle Teilchen im Kondensat. Das steht im starken Gegensatz zur gut untersuchten Quantenflüssigkeit ^4He . In dieser führt die starke Wechselwirkung dazu, dass maximal etwa zehn Prozent der Atome in der Bose-Einstein-kondensierten Phase sind.

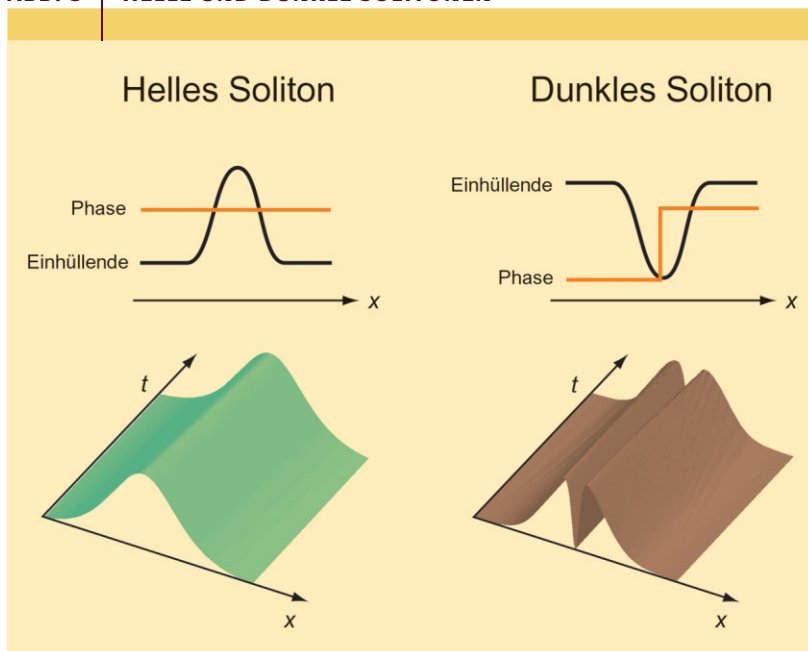
Zwar wird die Physik ultrakalter Atome durch die interatomare Wechselwirkung komplizierter. Man kann aber auch positiv ausgedrückt sagen, dass sie dadurch reichhaltiger wird. Eric Cornell, dessen Gruppe das erste BEC erzeugte und der dafür 2001 den Nobelpreis für Physik erhielt, brachte diesen Umstand schön auf den Punkt [6]: „Das Gesamtbild [der BEC-Theorie eines idealen Gases] ist relativ leicht zu verstehen, so dass nur noch wenig zu erforschen übrig bliebe, falls das System wirklich ein ideales Gas wäre.“

Berücksichtigt man die Wechselwirkung zwischen Atomen, dann kann man die Kondensatwellenfunktion am absoluten Temperaturnullpunkt durch eine nichtlineare Schrödinger-Gleichung ausdrücken:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x,t) = - \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}}_{\text{DT}} \Psi(x,t) + g \underbrace{|\Psi(x,t)|^2}_{\text{WWT}} \Psi(x,t). \quad (6)$$

Diese Gross-Pitaevskii-Gleichung ist nichtlinear, da sie im Wechselwirkungsterm (WWT) das Betragsquadrat der Wellenfunktion enthält und so die Dichte des Gases ins Spiel bringt. Der Proportionalitätsfaktor g enthält dabei die atom-spezifischen Details der Wechselwirkung. Bei abstoßender Wechselwirkung zwischen den Atomen ist g positiv, bei anziehender negativ.

ABB. 5 | HELLE UND DUNKLE SOLITONEN



Solitonen sind stabile Lösungen der nichtlinearen Schrödinger-Gleichung. Links: Helle Solitonen ergeben sich, wenn der Dispersionsterm dasselbe Vorzeichen hat wie der Wechselwirkungsterm. Rechts: Im Falle verschiedener Vorzeichen entstehen dunkle Solitonen.

Die Gross-Pitaevskii-Gleichung hat nun eine interessante Eigenschaft, die wir im Experiment ausnutzen. Mathematisch entspricht sie der Wellengleichung für Solitonen. Dabei spielt das Vorzeichen des Dispersionsterms (DT) eine entscheidende Rolle: Es entscheidet, ob dabei ein helles oder ein dunkles Soliton entsteht. Abbildung 5 zeigt oben, wie die Atomdichte in beiden Fällen über x verläuft. Unten im Bild ist zu sehen, dass sie mit fortschreitender Zeit t stabil bleibt, was für Solitonen charakteristisch ist.

Wir interessieren uns in unseren Experimenten für helle Solitonen im Bose-Einstein-Kondensat. Dunkle Solitonen, die als „Schatten“ verringerter Atomdichte durch ein BEC laufen, wurden in Physik in unserer Zeit bereits vorgestellt [3]. Die nichtlineare Schrödinger-Gleichung sagt also vorher, dass bei anziehender Wechselwirkung zwischen den Atomen die gewünschten hellen Solitonen als nichtzerfließende Wellenpakete entstehen (Abbildung 5). Diese Lösungen kann man sich veranschaulichen, wenn man das Wechselspiel der zwei grundlegenden Prozesse, Dispersion und Nichtlinearität, betrachtet. Im idealen Gas ohne Wechselwirkung erwartet man wie diskutiert, dass das Wellenpaket zerfließt. Die anziehende Wechselwirkung hingegen impliziert, dass eine lokalisierte Atomwolke sich zusammenzieht. Auf diese Weise kann sie schließlich ihre Energie minimieren. Ein Soliton entsteht genau dann, wenn die lineare Expansion durch nichtlineare Kompression kompensiert wird.

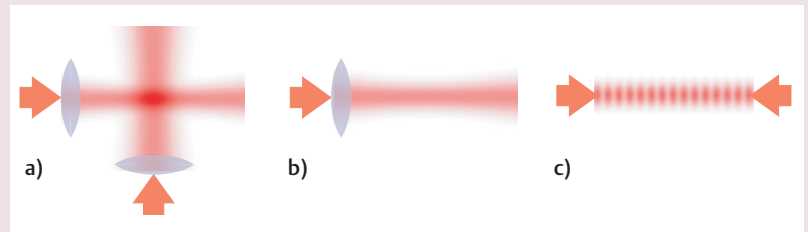
Um im Experiment ein Soliton zu erzeugen, muss man also beide einander entgegengesetzte Effekte genau aufeinander abstimmen. Das lineare Auseinanderfließen hängt dabei nicht von der Anzahl der Atome ab. Es wird aber umso schneller, je kleiner das Wellenpaket ist. Die anziehende Wechselwirkung hingegen sorgt für ein umso schnelleres Zusammenziehen der Wolke, je höher die Anzahl der Atome im Soliton ist. Damit stellt sich heraus, dass die Zahl der Atome

$$N = C \frac{1}{m} \frac{1}{\Delta x}$$

im Soliton von der räumlichen Ausdehnung Δx und der Masse der Atome abhängt. Die Konstante C ist umso kleiner, je stärker die Wechselwirkung ist – und auch je kleiner die transversale Ausdehnung des Wellenleiters ist [7]. Bei experimentell realisierbaren Parametern kann man ein Soliton erwarten, das aus nur etwa 350 Atomen besteht.

In der bisherigen Diskussion sind wir von einer attraktiven Wechselwirkung zwischen den Atomen ausgegangen. Diese ist jedoch im gebräuchlichsten Bose-Einstein-Kondensat aus Rubidium-Atomen nicht gegeben. Trotzdem kann man darin helle Solitonen erzeugen. Dazu nutzt man den Trick mit der effektiven Masse, die wir über das optische Gitter einstellen können. Realisiert man ein Rubidium-Kondensat im negativen Massenregime, dann führt nach Newton $a = F/m_{\text{eff}}$ eine abstoßende Kraft zu einer Beschleunigung in die entgegengesetzte Richtung. Folglich komprimiert sich die Atomwolke. Damit lässt sich im Regime der negativen Masse sogar ein helles Soliton erzeugen, obwohl

OPTISCHE POTENTIALE



a) Falle für die Atome, b) Wellenleiter, c) periodisches Potential.

Optische Potentiale werden im Experiment durch Laserstrahlen erzeugt. Das oszillierende elektrische Feld der Laserstrahlen sorgt für eine leichte, zeitlich periodische Verzerrung der Elektronenverteilung im Atom. Deshalb beschreibt man das Atom mit einem oszillierenden Dipolvektor D . Elektrische Dipole haben in einem elektrischen Feld eine potentielle Energie

$$V = -D \times E,$$

also auch im elektrischen Feld des Lichts. Liegt die Frequenz des Lichtfeldes unterhalb der Resonanzfrequenz der Elektronenwolke, dann schwingt der im Atom induzierte Dipol in Phase mit dem elektrischen Feld. Dabei wird die Wechselwirkungsenergie des Atoms mit dem Lichtfeld negativ, erreicht also bei maximaler Feldstärke ein Minimum. Das Atom kann in diesem Fall seine Energie minimieren, indem es sich zum Lichtfeldmaximum bewegt. Es erfährt also eine Kraft.

Eine genauere Betrachtung ergibt für das Potential

$$V(r) = \frac{\Gamma^2}{8} \frac{1}{\Delta} \frac{I(r)}{I_s}$$

Γ ist die Linienbreite des Übergangs, Δ der Frequenzunterschied zwischen dem Licht und der atomaren Übergangsfrequenz, $I(r)$ stellt die lokale Intensität des Lasers dar. I_s ist eine charakteristische Intensität (Sättigungsintensität), die vom verwendeten Atom abhängt.

Die Intensitätsverteilung des Lichtfelds stellt also für die Atome ein Potential dar. Durch Überlagerung verschiedener Lichtstrahlen lässt sich ein resultierendes Potential einstellen, dessen Form sehr weit variierbar ist. Dabei muss allerdings die Verstimmung

Δ groß genug gewählt werden, denn eine zu starke Resonanz würde die Atome zur spontanen Emission anregen. Die dadurch emittierten Photonen tragen Information des Systems mit sich fort, was im System der Atome zu einem Kohärenzverlust führt.

Wellenleiter und Scheinkräfte

Ist der Laser gegenüber der Resonanzfrequenz der Atome ins Rote verstimmt ($\Delta < 0$), dann werden die Atome also ins Intensitätsmaximum gezogen. Kreuzt man zwei solcher Laserstrahlen, dann erhält man eine Falle für die Atome (Bild a). In unseren Experimenten erzeugen wir damit das Bose-Einstein-Kondensat und halten es darin gefangen. Schalten wir einen Laserstrahl ab (Bild b), dann haben wir eine zylindersymmetrische Falle. Diese verwenden wir als Wellenleiter in den Experimenten zur freien Expansion des Kondensats.

Für die Manipulation der Dispersion benötigen wir ein periodisches Potential. Das erzeugen wir mit zwei Laserstrahlen, die einander entgegen laufen. Sie haben eine identische Wellenlänge λ und Polarisation (Bild c). Durch Interferenz entsteht das gewünschte sinusförmige Potential

$$V = V_0 \sin(4\pi x/\lambda).$$

Es hat die Periode $\lambda/2$ und die Potentialhöhe V_0 .

Wenn wir ein Wellenpaket mit einer effektiven negativen Masse an der Brillouin-Zonengrenze präparieren wollen, brauchen wir Scheinkräfte. Diese erzeugen wir einfach durch Beschleunigung des periodischen Potentials, indem wir die relative Phase zwischen den beiden Laserstrahlen kontrolliert verändern.

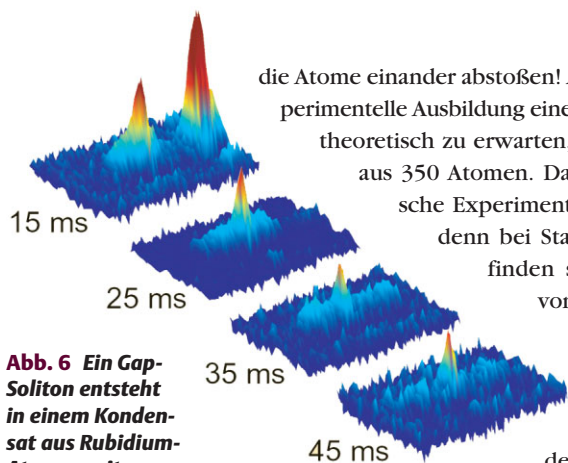


Abb. 6 Ein Gap-Soliton entsteht in einem Kondensat aus Rubidium-Atomen mit repulsiver Wechselwirkung und negativer Masse. Nach 15 ms ist noch der große Peak des siebzigprozentigen Anteils von Atomen zu sehen, die kontrolliert abgestrahlt werden. Der kleinere Peak entspricht schon dem Soliton mit 350 Atomen, eindeutig ist es nach 45 ms.

die Atome einander abstoßen! Abbildung 6 zeigt die experimentelle Ausbildung eines atomaren Solitons. Wie theoretisch zu erwarten, besteht das Soliton nur aus 350 Atomen. Das ist auch für atomoptische Experimente eine sehr kleine Zahl, denn bei Standardexperimenten befinden sich mehrere Millionen von Atomen in einem BEC. Deshalb ist die Herstellung der Solitonen eine experimentelle Herausforderung. Wir wählten in unserem Experiment sogar eine effektive Masse, die zehnmal kleiner als die normale Masse des Kondensats war. So konnten wir die Anzahl der Atome im Soliton um einen Faktor 10 erhöhen. Die Abbildung zeigt in der Atomverteilung nach 15 ms, dass wir zur Erzeugung des Solitons 70 % der Atome kohärent entfernten: Dieser Schritt ist wichtig, weil bei einer größeren Anzahl von Atomen nichtlineare Effekte das BEC zerstören, bevor sich ein Soliton bildet. Diese Atome sind nach 15 ms noch als großer Peak am rechten Rand sichtbar. Von den restlichen etwa 900 Atomen im kleineren Peak werden noch 550 Atome abgestrahlt. Nur 350 Rubidium-Atome bilden schließlich das Soliton. Die Energie dieses Solitons liegt in der Bandlücke, wie sie Abbildung 2 zeigt. Deshalb heißt es auch Gap-Soliton.

Ein perfektes Modellsystem

Das Bose-Einstein-Kondensat im optischen Gitter, wie wir es in unseren Experimenten einsetzen, ist ein interessantes Modellsystem zur Beobachtung quantenmechanischer Effekte. Die gezielte Abstimmung der linearen Ausbreitung und der Wechselwirkung zwischen den Atomen erlaubt die Erzeugung von nichtzerfließenden Wellenpaketen, den hellen Solitonen. Die hier besprochenen Experimente besitzen übrigens eine enge Analogie zur nichtlinearen Lichtpulsausbreitung in der Glasfaseroptik. In anderen Experimenten konnten auch eine Reihe von Effekten beobachtet werden, die aus der Festkörperphysik bekannt sind. Die bekanntesten Beispiele dazu sind die Untersuchung von Bloch-Oszillationen, des Landau-Zener-Tunnels zwischen Energiebändern sowie des Mott-Isolator-Übergangs in tiefen periodischen Potentialen. Eine Zusammenfassung der Arbeiten aus verschiedenen Arbeitsgruppen bietet zum Beispiel [8]. Wir erwarten noch viele interessante Entdeckungen an Bose-Einstein-Kondensaten in optischen Potentialen.

Zusammenfassung

Bose-Einstein-Kondensate sind perfekte Quantensysteme für das Studium der Dynamik von Wellenpaketen. Ein mächtiges Werkzeug sind dabei periodische optische Potentiale aus Laserlicht. Ein solches optisches Gitter wirkt auf das Wellenpaket aus ultrakalten Atomen wie ein atomares Kristallgitter auf freie Elektronen. Dadurch entstehen Energiebänder. Weil die Potentialtiefe des optischen Gitters frei einstellbar ist, wird so die effektive Masse der Wellenpakete elegant steuerbar. Sogar eine negative effektive Masse ist im optischen Gitter realisierbar. Mit ihr lässt sich das Zerfließen eines Wellenpakets zeitlich umkehren. Das System ermöglicht auch die Erzeugung heller Solitonen, also nichtzerfließender Wellenpakete, obwohl sich die Atome untereinander abstoßen. Bislang wurden diese aus Wolken mit etwa 350 Rubidium-Atomen erzeugt.

Stichworte

Bose-Einstein-Kondensat, Materiewelle, Wellenpaket, optisches Gitter, negative effektive Masse, helles Soliton, dunkles Soliton.

Literatur

- [1] H. Hölscher et al., *Physik in unserer Zeit* **2002**, 33(4), 178.
- [2] Anderson et al., *Science* **1995**, 269,198.
- [3] B. Bongs et al., *Physik in unserer Zeit* **2003**, 34(4), 168.
- [4] N.W. Ashcroft, N.D. Mermin, *Solid State Physics*, Saunders, Philadelphia 1976.
- [5] C.J. Pethick, H. Smith, *Bose-Einstein condensation in dilute gases*, Cambridge University Press, Cambridge (UK) 2002.
- [6] E. Cornell, in M. Inguscio et al., *Bose-Einstein condensation in atomic gases*, IOS Press, Amsterdam 1999.
- [7] B. Eiermann et al., *Phys. Rev. Lett.* **2004**, 92, 230401.
- [8] O. Morsch, M. K. Oberthaler, *Rev. Mod. Phys.* **2006**, 78, 179.

Die Autoren



Bernd Eiermann studierte in Konstanz, Promotion 2004 in der Gruppe von Markus Oberthaler. Nach einem Postdoc-Aufenthalt in Paris forschte er an der Universität Heidelberg, jetzt ist er bei Unaxis Optics in Lichtenstein.



Markus K. Oberthaler studierte in Innsbruck und promovierte dort im Jahre 1997 bei Anton Zeilinger. Nach seiner Postdoc-Zeit in Oxford wechselte er als Emmy-Noether-Stipendiat nach Konstanz in die Gruppe von Jürgen Mlynek. Seit 2003 lehrt und forschert er als Professor an der Universität Heidelberg.

Anschrift:

Prof. Dr. Markus Oberthaler, Universität Heidelberg, Kirchhoff-Institut für Physik, Im Neuenheimer Feld 227, D-69120 Heidelberg. Markus.Oberthaler@kip.uni-heidelberg.de